

注意：請標示題號，可用計算器

一. 某連鎖商店經理為了瞭解廣告的促銷效果，隨機抽取 20 家分店比較廣告前二星期的銷售量 X_i 為廣告後二星期的銷售量 Y_i ($i=1, 2, \dots, 20$)，得 20 家廣告前的平均銷售量 $\bar{X}=1000$ ，變異數 $S_x^2 = \frac{1}{19} \sum (X_i - \bar{X})^2 = 2500$ ，廣告後的平均銷售量 $\bar{Y}=1200$ ，變異數 $S_y^2 = 3600$ ，而廣告前後銷售量的樣本相關係數 $r=0.8$ ，

假設廣告後的銷售量 Y_i 為廣告前之銷售量 X_i 呈線性關係，其模式為

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \text{ 其中 } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i=1, 2, \dots, 20.$$

- (i) 求 β_1 的最小平方估計值。 (5分)
- (ii) 求均方差 (Mean Square Error) $MSE = ?$ (5分)
- (iii) 在 $\alpha=0.05$ 下檢定假設 $H_0: \beta_1 = 1$ 對 $H_1: \beta_1 \neq 1$ 。 (5分)
- (iv) 若已知某分店廣告前的銷售量是 950，預測該分店廣告後的銷售量是多少？並求其 95% 預測區間 (Prediction Interval)。 (10分)

二. 某公司想知道某食品的四種不同包裝設計是否對銷售量有影響，以 20 家設備，價格，地點大致相同的零售店做實驗，每種包裝設計隨機指定 5 個店銷售。在實驗期間各種包裝的樣本平均銷售量及樣本變異數如下

包裝設計	A 有卡通, 有彩色	B 有卡通, 無彩色	C 無卡通, 無彩色	D 無卡通, 有彩色
平均值	90	60	80	50
變異數	490	640	360	510

- (i) 利用變異數分析 (ANOVA)，在 $\alpha=0.05$ 下檢定此四種包裝設計的銷售量是否有差異 (10分)
- (ii) 在 $\alpha=0.05$ 下檢定有卡通的包裝與無卡通的包裝之銷售量有無差異。 (10分)

三. 某雜誌經理宣稱其客戶中有 60% 以上年收入超過 45 萬元，隨機從其客戶中抽取 68 位，其中有 50 位年收入超過 45 萬元，問在 $\alpha=0.05$ 下上述資料能否支持經理的斷言？ (10分)

四. 設某超級市場在一段時間內每分鐘到達人數之觀察次數如下表所示
試以卡方檢定此種顧客到達的分配是否為 Poisson 分配

($\alpha = 0.05$)

到達人數	0	1	2	3	4	5	6	7 及以上
觀察次數	11	24	29	31	27	11	7	10

(10分)

五. 設 X_1, X_2, \dots, X_{100} 是隨機取樣自常態分配 $N(\theta, 1)$,

(i) 寫出樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2$ 的機率密度函數 (P.d.f.) (5分)

(ii) 求 $E(S) = ?$ (其中 S 是樣本標準差) (5分)

(iii) 求 $P(X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \geq 2) = ?$ (5分)

六. 設 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是隨機取樣自幾何分配 $G(p)$ (其機率密度函數

是 $g(x_i) = p(1-p)^{x_i-1}$, $x_i = 1, 2, \dots$) (5分)

(i) 求 p 之最大可能估計 (MLE)

(ii) 試證 $P(X_1 > j+k | X_1 > j) = P(X_1 > k)$, 其中 j, k 為正整數 (5分)

(iii) 試證 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ 是負二項分配 $NB(5, p)$ (5分)

(iv) 試求條件期望值 $E(X_1 | Y=8) = ?$ (5分)

附表值:

$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$, 餘類推; $e = 2.7183$

$z_{0.025} = 1.96$

$z_{0.05} = 1.645$

$z_{0.159} = 1$

$z_{0.023} = 2$

$t_{16}^{(0.025)} = 2.120$

$t_{17}^{(0.025)} = 2.110$

$t_{18}^{(0.025)} = 2.101$

$t_{19}^{(0.025)} = 2.093$

$t_{20}^{(0.025)} = 2.086$

$t_{16}^{(0.05)} = 1.746$

$t_{17}^{(0.05)} = 1.740$

$t_{18}^{(0.05)} = 1.734$

$t_{19}^{(0.05)} = 1.729$

$t_{20}^{(0.05)} = 1.725$

$F_{16}^3(0.025) = 4.09$

$F_{16}^3(0.05) = 3.25$

$F_{16}^4(0.025) = 3.74$

$F_{16}^4(0.05) = 3.02$

$\chi_6^2(0.025) = 14.45$

$\chi_7^2(0.025) = 16.01$

$\chi_6^2(0.05) = 12.59$

$\chi_7^2(0.05) = 14.07$