

注意：可使用計算器，共七大題。

一. 設從已知變異數 (Variance) 是 25, 但平均數 (mean)  $\mu$  未知的常態分配中取出  $n$  個樣本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 在顯著水準  $\alpha = 0.05$  下欲檢定假設  $H_0: \mu = 30$  對假設  $H_1: \mu < 30$ .

- (1) 寫出決策規則 (即寫出棄卻域 reject region 的形式) (5分)
- (2) 若樣本數  $n = 16$ , 求  $\mu = 26.7$  時的檢定力 (power) (5分)
- (3) 若希望  $\mu = 26.7$  時的檢定力達到 0.95, 問至少需取幾個樣本 (5分)

二. 若  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  是取樣自帶有參數  $\theta$  的 poisson 分配的隨機變數

- (1) 寫出  $X_1$  的動差母函數 (Moment-Generating Function) (5分)
- (2) 利用 (1) 的結果證明  $X_1 + X_2$  是帶有  $2\theta$  的 poisson 分配 (5分)
- (3) 求條件機率  $P(X_1 + X_2 = 3 \mid \sum_{i=1}^{10} X_i = 5) = ?$  (5分)

三. 設有  $n$  組資料  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 吾人欲討論下列兩種回歸模式

模式 I:  $E y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ , 模式 II:  $E y_i = \beta_2 x_i$ , 其中  $x_i$  是常數

試回答並解釋下列各小題 (每小題 5 分, 只回答未解釋最多得 2 分)

- (1)  $\beta_1, \beta_2$  的最小平方位計是否恒相等?
- (2) 模式 I 的殘差和是否恒為零? 模式 II 的殘差和是否恒為零?
- (3) 模式 I 的回歸線恒經過那一點? 模式 II 的回歸線恒經過那一點?
- (4) 模式 I 的殘差平方和是否恒小於或等於模式 II 的殘差平方和?
- (5) 模式 I 的 multiple  $R^2$  是否恒小於或等於模式 II 的 multiple  $R^2$ ?

四. 若兩因素 A, B 各有 3 個水準 (level), 且每一配對的處理 (treatment) 都做 2 次實驗 (即全部實驗次數是 18 次) 經計算得出下列平方和

$$SSA = 6100, \quad SSB = 45300, \quad SSAB = 11200, \quad SSTO = 82450;$$

- (1) 求誤差的均方和  $MSE = ?$  (5分)
- (2) 在  $\alpha = 0.05$  下 檢定 A, B 有無交互作用 (Interaction) (5分)
- (3) 在  $\alpha = 0.05$  下 檢定因素 B 的主效用是否顯著. (5分)

(註: 假設 A, B 為 Fixed Effect)

五. 六個工人分別用甲, 乙兩種工具去完成一件工作所需時間(單位:分鐘)如下表.

工人 \ 工具	用甲工具所需時間	用乙工具所需時間
1	6.0	5.4
2	5.0	5.2
3	7.0	6.5
4	6.1	5.9
5	6.1	6.0
6	6.4	5.8
	$\sum X_i = 36.6$	$\sum Y_i = 34.8$

- (1) 若假設上述資料分別從常態分配取出, 在  $\alpha = 0.05$  下檢定用甲, 乙兩種工具所需時間是否有差異 (5分)
- (2) 若上述資料未假設為常態分配, 在  $\alpha = 0.05$  下試利用符號檢定法檢定用甲, 乙兩種工具所需時間是否有差異. (5分)

六. 若從某地區隨機抽出 40 人檢驗其血型得 A, B, O, AB 所占比率分別為 0.2, 0.4, 0.3, 0.1.

- (1) 在  $\alpha = 0.01$  下檢定此地區血型比率是否都相等 (即  $p_i = 0.25$ ) (5分)
- (2) 若抽取人數是 100 人而血型所占比率仍為 0.2, 0.4, 0.3, 0.1 在  $\alpha = 0.01$  下 (1) 的檢定結論是否有改變, 為什麼? (5分)

七. 設  $Y$  是自由度分別為  $m, n$  的 F 分配隨機變數.

- (1) 試証  $\frac{1}{Y}$  是自由度分別為  $n, m$  的 F 分配 (5分)
- (2) 試証  $\frac{1}{1 + \frac{m}{n} Y}$  是 Beta 分配 (5分)

附表:

- (1) 常態分配:  $z_{0.05} = 1.64, z_{0.025} = 1.96, z_{0.16} = 1.00$
- (2) t 分配:  $t_{15, 0.05} = 1.753, t_{15, 0.025} = 2.131, t_{5, 0.05} = 2.015$   
 $t_{5, 0.025} = 2.571, t_{6, 0.05} = 1.943, t_{6, 0.025} = 2.447$
- (3) F 分配:  $F_{2, 9, 0.05} = 4.26, F_{3, 9, 0.05} = 3.86, F_{4, 9, 0.05} = 3.63$
- (4)  $\chi^2$  分配:  $\chi^2_{3, 0.01} = 11.345, \chi^2_{3, 0.005} = 12.838, \chi^2_{4, 0.01} = 13.277, \chi^2_{4, 0.005} = 14.860$