

1. (20%)

(5%) (a) Let X and Y be independent random variables having cumulative distribution functions F_X and F_Y , respectively. Define $Z = \max\{X, Y\}$ and $W = \min\{X, Y\}$ to be the larger and the smaller of the two, respectively. Determine the cumulative distribution functions F_Z and F_W .

(15%)(b) Let X and Y be independent random variables uniformly distributed over the interval $\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right]$ for some fixed θ . Show that $W = X - Y$ has a distribution that is independent of θ with density function:

$$f_w(w) = \begin{cases} 1+w & \text{for } -1 \leq w < 0, \\ 1-w & \text{for } 0 \leq w \leq 1, \\ 0 & \text{for } |w| > 1. \end{cases}$$

2. (15%) Let \bar{y}_1 and S_1^2 be the sample mean and variance, respectively, of n_1 observations randomly selected from a population with mean μ_1 and variance σ_1^2 . Similarly, define \bar{y}_2 and S_2^2 for an independent random sample of n_2 observations from a population with mean μ_2 and variance σ_2^2 .

(5%) (a) Derive a $(1-\alpha)100\%$ large-sample confidence interval for $(\mu_1 - \mu_2)$.

(5%) (b) Suppose $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, determine the pooled estimator of the common variance σ^2 .

(5%) (c) Suppose $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, derive a $(1-\alpha)100\%$ small-sample confidence interval for $(\mu_1 - \mu_2)$.

3. (15%) Suppose x_1, x_2, \dots, x_n is a random sample from a normal distribution with unknown mean μ and variance $\sigma^2 = 1$, i.e.,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$$

(5%) (a) Determine the likelihood function of the sample, $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu)$.

(10%)(b) Suppose we want to test $H_0: \mu = 0$ against the alternative $H_1: \mu > 0$. Fisher's likelihood ratio test statistic is

$$\lambda = \frac{\text{Likelihood assuming } \mu = 0}{\text{Likelihood assuming } \mu = \hat{\mu}}$$

where $\hat{\mu}$ is the maximum likelihood estimator of μ . Show that

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \text{ and } \lambda = e^{-n\bar{x}^2/2}.$$

四. a. 門德爾遺傳理論敘述某一類別之豌豆具有以下幾種外型：圓而黃，皺而黃，圓而綠，皺而綠，而其數目應照如下之比例：9:3:3:1。
(8%) 假定 160 個這類豌豆在各外型經栽種實驗觀察之數目分別為 86, 35, 27 和 12。試問這些資料是否符合遺傳模式？請用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 從事檢定。

b. 消費者基金會對市面上六種品牌的電池加以試驗並記錄下各品牌之電池性能的排名順序(1代表最優, 6代表最差)及售價的情形。
(7%) 若要計算排名與售價之相關程度，應以何種統計方法加以判定較為適宜，試提供一種統計公式並計算其相關係數。

廠牌	排名	售價(元)
A	4	6
B	6	10
C	3	12
D	1	15
E	5	8
F	2	14

五. 試根據下列之估計迴歸方程式：

$$\hat{y} = 0.21 + 0.42x, \text{ 式中}$$

\hat{y} 代表估計的重量(公斤)
 x 代表飼料的營養含量(%)

又迴歸方程式之判定係數 (coefficient of determination) $r^2 = 0.78$, 並已知蒐集的樣本數 $n = 30$, 而且依變數總平方和為 $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 45$ 。

- (4%) a. 試求迴歸平方和 SSR 及誤差平方和 SSE 之值。
- (6%) b. 請用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定迴歸關係式確呈直線之關係。
- (5%) c. 相關係數 r_{xy} 之值為多少？是正值或負值？說明之。

六. a. 一研究公司欲檢定三種品牌汽油每加侖行哩數的特性, 由於不同汽油表現在不同品牌汽車上會呈現不同之特性, 故選五種品牌的汽車, 並當成集區(Block), 也就是說, 每種品牌的汽車分別以每種汽油測試(每次測試一種汽油), 此實驗之結果如下:

(10%)

		集區(Block): 汽車				
		A	B	C	D	E
汽油品牌	I	18	24	30	22	20
	II	21	26	29	25	23
	III	20	27	34	24	24

每加侖哩數, 已知 $\sum_{j=1}^5 y_j^2 = 9233$.

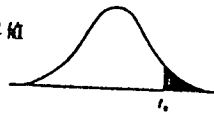
在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 三種品牌的汽油其平均每加侖哩數之特性是否有顯著性差異?

b. 上題 a, 若改以 完全隨機設計 (Completely Randomized Designs) 之 ANOVA 過程分析, 則應如何分析, 列出 ANOVA 表解析之, 並比較 (a), (b) 二種結果, 以說明 集區效果 之需要性如何。
(block effect)

常態曲線下之面積

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
-3.2	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
-3.1	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
-2.9	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017
-2.8	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
-2.7	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026	0.0026
-2.6	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031
-2.5	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038
-2.4	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045
-2.3	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054
-2.2	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064	0.0064
-2.1	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075	0.0075
-2.0	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087
-1.9	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098	0.0098
-1.8	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109
-1.7	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120
-1.6	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131	0.0131
-1.5	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143
-1.4	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155	0.0155
-1.3	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168	0.0168
-1.2	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181
-1.1	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194	0.0194
-1.0	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207	0.0207
-0.9	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220	0.0220
-0.8	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233	0.0233
-0.7	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246	0.0246
-0.6	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259	0.0259
-0.5	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271
-0.4	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284	0.0284
-0.3	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297
-0.2	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310	0.0310
-0.1	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323	0.0323
0.0	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336	0.0336
0.1	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349
0.2	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362	0.0362
0.3	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375
0.4	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389
0.5	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401	0.0401
0.6	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413	0.0413
0.7	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425	0.0425
0.8	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438
0.9	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450
1.0	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463	0.0463
1.1	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475
1.2	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488	0.0488
1.3	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500
1.4	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513	0.0513
1.5	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525	0.0525
1.6	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538	0.0538
1.7	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550	0.0550
1.8	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562	0.0562
1.9	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575	0.0575
2.0	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588
2.1	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600	0.0600
2.2	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613	0.0613
2.3	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
2.4	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638	0.0638
2.5	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650	0.0650
2.6	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662	0.0662
2.7	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675	0.0675
2.8	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688	0.0688
2.9	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700	0.0700
3.0	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713	0.0713
3.1	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725
3.2	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738	0.0738
3.3	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750	0.0750
3.4	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762
3.5	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775
3.6	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788	0.0788
3.7	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800
3.8	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813	0.0813
3.9	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825	0.0825
4.0	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838	0.0838
4.1	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850	0.0850
4.2	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862	0.0862
4.3	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875	0.0875
4.4	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888	0.0888
4.5	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900	0.0900
4.6	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913	0.0913
4.7	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925
4.8	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938	0.0938
4.9	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950	0.0950
5.0	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962	0.0962
5.1	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975	0.0975
5.2	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988	0.0988
5.3	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998	0.0998
5.4	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

附表 1 的臨界值



n	t _{0.100}	t _{0.050}	t _{0.025}	t _{0.010}	t _{0.005}	d.f.
2	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
3	1.896	2.920	4.303	6.965	9.925	2
4	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
5	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
6	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
7	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
8	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
9	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
10	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
11	1.372	1.812	2.220	2.764	3.169	10
12	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
13	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
14	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
15	1.345	1.761	2.14			