

題目中若無法求解，則請說明無法求解之原因

一. 設 $u=f(r, \theta)$, $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$ (10%)

二. 求 $\frac{\partial}{\partial y \partial x} f[g(xy, 2x), h(x^2, x^3)]$ (10%)

三. 鐵路局為提高營運收入，提出一個團體乘車的優待辦法(此辦法，必須有300位乘客乘坐，才得享受優待)。該優待辦法為：乘客為300人時，每人票價為100元，當超過300人時，每增加一位乘客，則平均每人的票價減少一角，問當旅客為多少人時，鐵路局的收入最多？最大收入為多少？(8%)

四. 本校交研所曾作調查研究 2500 位旅客往返於台北與台南之間，其搭乘車輛種類的情況，研究中發現，往台北搭乘自強號的旅客中有 50% 在回台南時，仍搭乘自強號，而分別有 20%，20%，10% 的旅客會改搭乘莒光號、中興號、國光號返回台南。至於其他搭乘莒光號、中興號、國光號到台北的旅客，其回程時，搭乘車輛的情況如下列矩陣所示：

	自強號	莒光號	中興號	國光號
自強號	0.5	0.2	0.2	0.1
莒光號	0.6	0.2	0.1	0.1
中興號	0.4	0.2	0.2	0.2
國光號	0.2	0.1	0.6	0.1

上述矩陣中之元素 a_{ij} 表示往台北搭乘第 i 種運具而返回台南搭乘第 j 種運具之比率。今知 2500 位旅客返回台南時，有 46.4% 的人搭乘自強號，19.2% 的人搭乘莒光號，21.2% 的人搭乘中興號，13.2% 的人搭乘國光號。試問這些旅客中，在前往台北時，各有多少人搭乘自強號、莒光號、中興號、國光號？(12%)

五. (一) 試述一般求最佳值(或極值)可使用的方法?
 (二) 說明這些方法的使用時機或限制條件。(10%)

六. 有一運輸問題，其各工廠的生產量和各銷售商的需要量，以及單位運輸費用如右表所示。試求在合於各工廠的生產量及各銷售商的需要量之條件下，(一) 產品該如何分配，總運輸費用才會最低？(二) 最低之運輸費用為多少？(12%)

	銷 售 商	D ₁	D ₂	D ₃	生產量
工 廠	S ₁	3	1	4	50
	S ₂	7	3	8	50
	S ₃	2	3	9	60
	需 求 量	45	50	60	

七. 一個停車場分成甲、乙兩區. 假設因設計技術之差異, 故車輛停車之空間亦不同. 甲區之停車場, 停放一輛A型車需4平方公尺, 停放一輛B型車需2平方公尺, 而乙區之停車場, 則為停放一輛A型車需2平方公尺, 停放一輛B型車需4平方公尺. 另甲區之可供停車面積為80平方公尺, 乙區為100平方公尺. 停放A型車收費10元, B型車收費8元. 今欲用 Simplex Method 求解該停車場之最大停車費收入.

設 X_1 代表A型車停車數, X_2 代表B型車停車數, 再加入虛假變數 (Slack Variable) 後, 可表示成下列之數學式:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10X_1 + 8X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ \text{Subject to: } & 4X_1 + 2X_2 + X_3 = 80 \\ & 2X_1 + 4X_2 + X_4 = 100 \\ & X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

今選取 X_3, X_4 兩向量為基底 (Basis). 即 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

得出 $X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix}$, $Y = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Z = C_B' Y = [0, 0] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, 0, 0, 0]$

將以上資料製成表1, 因未達最大收入, 故選取 a_1 為進入向量 (Entering Vector), 選取 a_3 為退出向量 (Leaving Vector), 經計算得出如表2之結果.

C _B	B	C _j b	C _j			
			10	8	0	0
		a _j	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄
0	a ₃	80	4	2	1	0
0	a ₄	100	2	4	0	1
C _j -Z _j	0	0	10	8	0	0

表 1

C _B	B	C _j b	C _j			
			10	8	0	0
		a _j	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄
10	a ₁	20	1	1/2	1/4	0
0	a ₄	60	0	3	-1/2	1
C _j -Z _j	200	0	0	3	-5/2	0

表 2

- (一) 利用本題之例子來解釋表2中向量 $\begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 所代表經濟上之意義.
- (二) 表2因尚未達最大收入, 故應選取何者為進入向量, 何者為退出向量, 請以本例所代表經濟上之意義來解釋為何會做這樣的選擇?
- (三) 利用本題之例子解釋表2中 $C_j - Z_j$ 所代表之經濟上的意義.
- (四) 將本題轉為對偶問題 (Dual), 並解釋其目標函數及限制條件在經濟上之意義. (20%)

八
 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 求
 (a) 矩陣 A 之階數 (order)?
 (b) 矩陣 A 之秩數 (rank)?
 (c) 矩陣 A 之跡 (trace)?
 (d) 矩陣 A 之值?

設 $A = \begin{bmatrix} -24 & 0 & 8 & 40 \\ -1 & -5 & -3 & 20 \\ 14 & -10 & 2 & 0 \\ -10 & -10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

若 $B = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 10 & 0 \\ 14 & -10 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 20 \\ -24 & 0 & 8 & 40 \end{bmatrix}$ 求 $B^{-1} = ?$

若 $C = \begin{bmatrix} -24 & 0 & 2 & 40 \\ -1 & -5 & 1 & 20 \\ 14 & -10 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 求 $C^{-1} = ?$

(18.9%)