本試題每題各十分.

一、試求 $\dfrac{\partial^3}{\partial y \partial z \partial y} f(g(x,y,z))$

二、試求 $\int_0^2 \int_0^{x^2} (2xy + e^{x^3})\, dy\, dx$

三、將 $\ln x$ 展開為 $(x-1)$ 之冪級數, 並依此冪級數求 $\ln 2$ 之近似值. $x>0$ (求至 $n=6$)

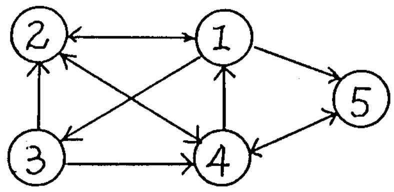
四、某公司生產三種產品, 第一種產品生產 x 件, 第二種 y 件, 第三種 z 件, 若此三種產品之利潤各為 a、b、c 元, 在 $x+y^2+z^2=90$ 之限制情況下, 求最大利潤之各產品產量、(試用 a. b. c. 表示之)

五、(a) 求向量 [1, 2, 3, 4] 及 [4, 3, 2, 1] 之夾角.
(b) 求向量 [1, 2, 3, 4] 之長度.
(c) 求向量 [1, 2, 3, 4] 之單位長度向量.

六、A 表示一方陣 (square matrix), A^+ 表示方陣 A 之伴隨矩陣 (adjoint matrix), $|A|$ 表示方陣 A 之行列式 (determinant), A^{-1} 表示方陣 A 之逆矩陣 (inverse matrix).
(a) 試証明 $A^{-1} = \dfrac{A^+}{|A|}$
(b) 依上式求 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 之逆矩陣.

七、試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 之特徵根 (eigenvalue) 及特徵向量 (eigenvector).

八、



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一網路如上圖所示，箭號代表可通行之方向，若將網路表示成矩陣A，其中 $a_{ij}=1$ 代表可從 i 通行至 j，$a_{ij}=0$ 表示不可通行，試解釋 A^2 及 A^3 在網路上所代表之意義。

九、設需求函數為 $D(p)=4-p+2\dfrac{dp}{dt}+\dfrac{d^2p}{dt^2}$

供給函數為 $S(p)=p+5\dfrac{dp}{dt}+2\dfrac{d^2p}{dt^2}$

p 表示價格，t 表示時間，且 $p(0)=2$，$p'(0)=4$

(a) 試求均衡時 $p(t)$ 之通解 (general solution).

(b) 經過長時期後，$p(t)$ 是否會趨於均衡價格。

十、試解下列線性規劃問題，

minimize $z=2x_1+x_2-x_3$

subject to: $x_1+x_2+x_3\le 8$

$x_1-x_3\ge 5$

$x_2-x_3\ge 4$

$x_1, x_2, x_3\ge 0$