

以下第 1, 2 題各 11 分, 其餘各題各 13 分

1. 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x - \frac{\pi}{4}) \tan 2x$

2. 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

3. 求圖形 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 從 $x=0$ 至 $x=a$ 的弧長

4. 瑕積分 (improper integrals) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ 為收斂或發散? 若為收斂, 求其極限值.

5. 求方程式 $xy = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 在某 $(2, 0)$ 之鄰近所界定之隱函數 f 於某 2 之導數 $f'(2) = ?$

6. 求 $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$ 的極大值或極小值, 受限於 $x^2 - y^2 = 1$

7. 試作下列方程式之圖形: $y^2 = x^2(x-a)$, $a > 0$

8. 設 $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, 證明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
但 $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$