

1. 求下列極限

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/4} dt$. (5%)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/3}$. (5%)

2. 找出下列運算的錯誤，並說明之。 (10%)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} &= \frac{\log\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0} x^2} \\ &= \frac{\log(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x)}{\lim_{x \rightarrow 0} x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. 證明瑕積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 存在並計算它的值。 (20%)

4. 求 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx$. (10%)

5. 求 $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^x dx dy$. (10%)

6. 找出函數 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 1$ 在曲域 $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的絕對最大及絕對最小值。 (20%)

7. 求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+3}$ 的收斂曲間 (interval of convergence). (10%)

8. 證明 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. (10%)