

1. 試詳述下列兩種運算之間的差異 (含方法、適用對象和運算結果等等) :

- (a) 向量的內積和外積 (dot product & cross product) (5 分)  
 (b) 函數的微分和差分 (differentiation & difference) (5 分)  
 (c) 函數的富立葉級數和富立葉積分 (Fourier series & Fourier integral) (10 分)

2. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。

- (a) 試求  $e^A$ 。(5 分)  
 (b) 試求矩陣  $B$  之特徵值和特徵向量。(10 分)  
 (c) 試求  $e^B$ 。(10 分)

3. 以  $n$  組數據  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  描點繪圖, 發現很接近函數關係式:  $y = \alpha x^\beta$ 。此時有兩種方式來求取最佳之  $\alpha$  和  $\beta$ , 其一為線性迴歸分析, 另一為非線性迴歸分析。

- (a) 試問如何以最小平方法(method of least squares)進行線性迴歸分析? 至少需列出兩條聯立方程式以解  $\alpha$  和  $\beta$ 。(10 分)  
 (b) 試問如何以最小平方法進行非線性迴歸分析? 至少需列出兩條聯立方程式以解  $\alpha$  和  $\beta$ 。(10 分)  
 (c) 試問(a)和(b)的  $\alpha$  和  $\beta$  是否會相同? 為什麼? 若是不同, 如何判斷何者較佳?  
 (10 分)

4. (a) 給定起始條件  $y_0(0) = 1$ , 試解下列微分方程式之  $y_0(x)$  :

$$\frac{dy_0(x)}{dx} = -\lambda y_0(x)$$

式中,  $\lambda$  為常數。(10 分)

(b) 給定起始條件  $y_n(0) = 0, n = 1, 2, \dots$ , 試解下列遞迴微分方程式之  $y_n(x)$  :

$$\frac{dy_n(x)}{dx} = -\lambda y_n(x) + \lambda y_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

式中,  $\lambda$  為常數,  $y_0(x)$  如(a)所求。(15 分)