

一. 求下列各極限之值 (每小題 5 分, 共 20 分)

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = ?$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = ?$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\sin x} = ?$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+1} \right)^x = ?$

二. (i) 試証當  $0 < x < 1$ ,  $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

(ii) 利用(i)的結果求  $\ln \frac{4}{3}$  到小數點後第 = 位. (共 10 分)

三. 試求下列的極限值 (10 分)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{n+3k} = ?$$

四. 求曲線  $y = \sqrt{x}$  及  $y = \frac{-x}{2} + 4$  以及  $x$  軸所圍成區域的面積 (10 分)

五. 若函數  $g$  是可微分且  $g\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = x$ . 求  $g'(1) = ?$  (10 分)

六. 若  $F(x) = \int_0^{1+x^2} \sqrt{1+t^3} dt$  求  $F'(2) = ?$  (10 分)

七. 試証  $\sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$ , 其中  $0 < x < 1$ . (10 分)

八. 求積分  $\int_0^1 \left[ \int_{2x}^2 e^{y^2} dy \right] dx = ?$  (10 分)

九. 若某公司生產某種產品數量  $x$  時其收入 (Revenue) 函數及成本 (Cost) 函數分別為  $R(x) = -3x^2 + 970x$  和  $C(x) = 2x^2 + 500$ . (10 分)

(i) 求生產數量是多少時利潤 (profit) 會最大.

(ii) 求生產數量是多少時平均成本 (average cost) 會最小.