

壹、選擇題 (請在下列各題中選出一個最佳的答案，每題 5 分) 60%

1. 一般銀行在計算利息時，多採用複利方式，例如每年複利 m 次，當 $m \rightarrow \infty$ 時，稱之為連續複利。假設年利率為 R ，則 \$1 之存款， t 年後之本利和為多少？

- (A) ∞ , (B) e^{mt} , (C) e^{Rt} , (D) e^{mR} , (E) $(1+R)^t$

2. If $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$, then $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$

- (A) +1, (B) -1, (C) ∞ , (D) 0, (E) does not exist.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = ?$

- (A) 2, (B) 3, (C) 1, (D) 0, (E) ∞

4. If $y = x^x$, then $\frac{dy}{dx} = ?$

- (A) x^x , (B) $x \cdot x^{x-1}$, (C) $x^x \cdot \ln x$, (D) $x^x(1 + \ln x)$, (E) $e^x(x + \ln x)$

5. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = ?$

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{5}{8}$

6. 一個圓柱形而無蓋的杯子，其容積為定數 v ，試求高(h)及底半徑(r) 各為多少時，製作此杯子最省材料？

- (A) $r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, (B) $r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, (C) $h = 2r = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, (D) $r = 2h = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$,

- (E) $h = 2r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$

7. 設某商品於銷售量為 x 時，每單位商品的利潤為 $R(x) = 25e^{-x/5}$ ，問銷售量為多少時，總利潤(TR)為最大？此時之總利潤(TR)為多少？

- (A) $x = 5$, $TR = 25e^{-1}$; (B) $x = 5$, $TR = 125e^{-1}$; (C) $x = 10$, $TR = 25e^{-2}$,
 (D) $x = 10$, $TR = 250e^{-2}$; (E) $x = 25$, $TR = 625e^{-5}$

8. If $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \text{Cos}x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$, $\alpha > 1$, then $\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \text{Cos}x)^2} = ?$

- (A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, (B) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, (C) $\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$, (D) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}}$, (E) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

9. What is the volume of the region common to the intersecting cylinders $X^2 + Y^2 = a^2$ and $X^2 + Z^2 = a^2$?

- (A) $\frac{\pi a^3}{3}$, (B) $\frac{8\pi a^3}{3}$, (C) $\frac{\pi a^3}{8}$, (D) $\frac{16a^3}{3}$, (E) $\frac{8a^3}{3}$

10. 下列那一個(或那些個)積分為收斂(converges)?

I. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, II. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} dx$, III. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a} dx$

- (A) I, (B) II, (C) III, (D) I and II, (E) II and III

11. 當 x 值的範圍為多少時, 級數 $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$ 可收斂(converges)?

- (A) For all x, (B) $x < -3$, (C) $-3 \leq x < 3$, (D) $x > 0$, (E) $x = 3$.

12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = ?$ for all positive integers $n > 1$.

- (A) ∞ , (B) 2, (C) 1, (D) > 1 , (E) ≤ 1

貳、應用題: 40%

1. 從事房地產的王君有一筆土地可出售, 自現在起 t 年後的售價為 $400,000 + 100,000t$ 。若出售後, 王君有機會從事連續複利 8% 的投資。問 10 年後賣出抑或 20 年後賣出較為有利? 又最佳的賣出時機為何? (12 分)

2. Let the random variable X have the p.d.f. (probability density function)

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad 0 < x < \infty, \text{ zero elsewhere}$$

Find the mean and variance of X. (12 分)

(Note that the mean of X is defined as $E(X) = \int xf(x)dx$ and the variance of X is defined as $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, where $E(X^2) = \int x^2 f(x)dx$.)

3. Find the maximum and minimum values of $X^2 + Y^2 + Z^2$ subject to the constraint

conditions $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ and $z = x + y$. (16 分)