國立成功大學 81 學年度 統計所考試(機率論試題)

1. 設 X_1, X_2 是 iid 的隨機變數，其密度函數 (p.d.f) 爲 (10分)

$$f(x_i) = \begin{cases} \exp(-x_i) & x_i > 0 \quad i=1,2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $X_1 + X_2$ 及 $X_1 - X_2$ 的分配。

(2) 試証 $X_1 + X_2$ 與 $X_1/(X_1 + X_2)$ 獨立。

2. 設 X, Y 是 iid 的隨機變數，令 $Z = X - Y$ (15分)

(1) 試證 0 爲 Z 的中位數。

(2) 試證 $E(|Z|) \le 2E(|X|)$。

(3) 試證 $P(|Z| > a) \le 2P(|X| > a/2)$，其中 $a > 0$。

3. 設 X, Y 的聯合密度爲 (15分)

$$f(x,y) = c\exp(-x^2 + xy - y^2) \qquad -\infty < x, y < \infty$$

(1) 求 c = ?

(2) 求 x, y 的相關係數。

(3) 求 $E(Y \mid X = 3) = ?$

4. 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 iid 服從 Uniform 分配 $U(-\theta, \theta)$，$\theta > 0$ (25分)

(1) 証明 $T = \mathrm{Max}(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|)$ 是 θ 的充分統計量，

(2) 証明 $\hat{\theta} = \bar{X}$ 是 θ 的不偏 (Unbiased) 估計量。

(3) 証明 $\tilde{\theta} = (n+1)/n\, T$ 是 θ 的不偏估計量。

(4) 利用 $\hat{\theta}$ 與 $\tilde{\theta}$ 估計 θ，何者較佳，爲什麼？

(5) 求証 $\tilde{\theta} \xrightarrow[n \to \infty]{D} \theta$ (即 $\tilde{\theta}$ Convergent to θ in Distribution)。

5. 設 X_1, X_2, X_3, X_4 iid 服從 Normal 分配 $N(0,1)$，令 (10分)

$$Q = X_1^2 + (X_2 - X_3)^2/2 + X_4^2, \qquad X^t = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

(1) 若將 Q 表成二次型 $X^t A X$，求 A = ?

(2) 試証 Q 是卡方分配，並求其自由度。

6. 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 iid 服從 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 皆未知． (10分)
求 μ/σ 的 (1) MLE 估計 (2) UMVU 估計.

7. 設 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是 iid 其分配函數爲 F，而 (15分)
$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$ 是 iid 其分配函數爲 G，此兩組
隨機變數是獨立且都是連續型，
令

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{當 } X_i < Y_j \\ -1 & \text{當 } X_i > Y_j \end{cases}$$

而 $W = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{6} Z_{ij}$， 吾人欲檢定

$$\begin{cases} H_0 : F(Z) = G(Z) & \text{，對所有 } Z \\ H_1 : F(Z) > G(Z) & \text{，對所有 } Z\text{；} \end{cases}$$

(1) 在 H_0 下，求 $P(W=30) = ?$　$P(W=1) = ?$

(2) 在 H_0 下，求 $E(W) = ?$

(3) 若顯著水準 $\alpha = 0.01$，求棄卻域？