1. 假設X服從二項分配B(n,U)，其中U服從Beta(α,β)

分配，i.e. $f(u)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}$，$\alpha$，$\beta>0$，

$0<u<1$，

(5%)(a)試求隨機變數X的動差生成函數(Moment generating function)，$M_X(t)$。

(6%)(b)利用(a)求算E(X)及Var(X)。

(9%)(c)又若u服從均勻分配U(0,1)，$M_X(t)$，E(X)及Var(X)又分別爲何？

2. 假設$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$服從均勻分配U(0,1)，且互相獨立。令$Y_{(1)}\le Y_{(2)}\le\cdots\le Y_{(n)}$爲其有序統計量(order statistics)。

(5%)(a)求算$Cov(Y_{(r)},Y_{(s)})$，其中$1\le r<s\le n$。

(5%)(b)令$R=Y_{(n)}-Y_{(1)}$，計算Var(R)。

(10%)(c)假設$X_1,X_2,\cdots,X_n$獨立且服從Weibull分配，其累積分配函數爲$G(x)=1-e^{-(\lambda x)^\alpha}$，$x>0$，$\lambda>0$，$\alpha>0$，令$Z=\max_{1\le i\le n}G(X_i)-\min_{1\le i\le n}G(X_i)$，則E(Z)及Var(Z)爲何？

3. (a)試述下列敘述之定義：

(10%)(i) $X_n\xrightarrow{a.s.}X$: $\{X_n\}$ converges to X almost surely.

(ii) $X_n\xrightarrow{q.m.}X$: $\{X_n\}$ converges to X in quadratic mean.

(b)證明或反證明下列二敘述：

(10%)(i)若$X_n\xrightarrow{a.s.}X$，則$X_n\xrightarrow{q.m.}X$。

(ii)若$X_n\xrightarrow{q.m.}X$，則$X_n\xrightarrow{a.s.}X$。

4. 假設X服從負二項分配NB(r,p)，

$$\text{i.e. } X \sim f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x, x = 0,1,2,\cdots$$

(5%)(a)證明當 $p \to 0$ 時，$2pX \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$，其中 $Y \sim \chi^2(2r)$，亦即證明2pX分配收斂到卡方分配。

(10%)(b)已知卡方分配自由度爲2時之第一四分位數(first quartile)爲0.051，及第三四分位數爲2.773。若現有一串獨立的白努力試驗，其成功機率爲0.001，令X爲直到第一次成功所需之實驗次數，試估算X分配的第一四分位數及第三四分位數。

(5%)(c)在(b)中，令 $\mu = E(X)$ 爲X的期望值，以 $\chi^2(2)$ 的分佈來估算 $P(X \le \mu)$ 之值。

5. 假設 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m}$ 爲一組獨立且具
(10%)有相同分配的隨機變數，令

$$V = \max_{1 \le j \le n+m}\{X_j\} - \max_{1 \le j \le n}\{X_j\}$$，試求 $P\{V = 0\}$。

6. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 獨立且服從Poisson(θ)分配，試推
(10%)導參數 $\eta = P(X=1)$ 的UMVUE(uniformly minimum variance unbiased estimator)，並說明該估計量是否爲唯一。