

注意：未寫明演算過程者不給分！

1. 計算以下各小題的值： (30%)

(a)  $\int \int_R [(x-y)^2 + 2(x+y) + 1]^{-1/2} dx dy$ , 其中  $R$  是由  $x=0$ ,  $x=2$  及  $x=y$  三直線所決定的三角形。

(b) 求極小值： $f(u) = u^{-m} - 2au^{1-m} + bu^{2-m}$ ,  $0.2 \leq u \leq 0.9$ , 其中  $0 \leq m \leq 2$ ,  $a, b > 0$ 。

(c)  $\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx$ 。 (e)  $\int_0^{\infty} e^{-y^2 - x^2/y^2} dy$ 。

(d)  $\lim_{y \rightarrow 1} \left[ \frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y} \right]$ 。 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ 。

2. (a) 設  $f$  是由  $R^2$  映至  $R$  的函數，寫出“ $f$  可微分”的定義。 (5%)

(b) 若  $f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$   
證明： $f$  的偏導數處處存在，但在  $(0, 0)$  不可微。 (5%)

3. 下列級數是否收斂？證明你的結論。 (10%)

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots$$

4. (a) 設  $A, X, Y$  為適當階次矩陣。證明： $AX = AY \iff A'AX = A'AY$ 。 (5%)

(b) 證明： $\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - BA^{-1}C|$ 。 (5%)

5. 令  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 9 \end{bmatrix}^t$  是  $9 \times 2$  矩陣，故  $A$  的行空間  $c(A)$  是  $R^9$  的一個子空間。

(a) 試找出  $c(A)$  上的垂直投影矩陣 (projection matrix)。 (5%)

(b) 找出  $c(A)$  上的一組規格正交基 (orthonormal basis)。 (5%)

6. (a) 令  $T(f) = D^2(f) + D(f) + f$ ，其中  $D(f)$  為  $f$  的導數， $D^2(f) = D(D(f))$ ；又設  $W = \text{span}(\{e^x, xe^x, x^2e^x\})$ 。證明  $T$  是  $W$  上的一個線性算子 (linear operator)。 (5%)

(b) 對應基底  $B = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ ，求  $T$  的矩陣。 (5%)

7. 設  $x, y$  為  $R^n$  中的兩向量，證明： $\|x\| = \|y\|$  若且唯若存在一正交矩陣 (orthogonal matrix)  $A$  使得  $y = Ax$ 。 (10%)

8. 令  $A, B$  是任意  $n$  階方陣。證明  $AB$  和  $BA$  具有相同特徵值 (eigenvalue)。 (10%)