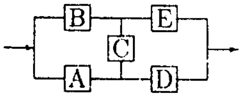
1. 一系統具有五個元件如圖



令 p_A 表示A元件正常的機率，p_B 表示B元件正常的機率，以此類推。假設各元件是否正常相互獨立。若由左端至右端有一通路其各元件都正常，則整個系統可正常運作。試以 p_A 等表示整個系統能正常運作的機率 R。若各元件正常運作之機率均爲 p，則 p 對 R 的影響多大？並分別計算 $p = .90$ 及 $.95$ 時對應的 R。 (15%)

2. 假設已知一疾病檢驗法對有罹患者能檢出之機率(sensitivity)爲95%，對非患者能檢驗結果正常之機率(specificity)爲98%。而檢驗結果是有病(陽性)者中其實正常(假陽性)比率爲40%。現在有1000人經過檢驗，問：

   (a) 預期這些人之中有多少人有病？受檢者中多少人檢驗結果爲陽性？

   (b) 假設受檢者之中有70人陽性，從統計的觀點，這和上述各項比率是否一致？爲你的結論提出証據。

(20%)

3. (a) 証明：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互獨立若且唯若對任意有界函數 $u_1, u_2, \ldots, u_n$，

$$E[u_1(X_1)u_2(X_2)\cdots u_n(X_n)] = E[u_1(X_1)]E[u_2(X_2)]\cdots E[u_n(X_n)]。\qquad (*)$$

   (b) 舉例說明若僅假定有一組函數 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 使(*)成立，並不能保証 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的獨立性。

(15%)

4. 假設 X 服從gamma分布，其p.d.f.爲

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \qquad (**)$$

求 $\log X$ (自然對數)的期望值和變異數。 (10%)

5. 假設馬拉松競賽起點與賽者各領取一連續識別號碼貼在衣服上。今有一統計學家於中途看了一陣子，觀察通過之與賽者號碼爲 $x_1, x_2, \ldots, x_n$。他想對與賽人數 θ 做推論。

   (a) 寫出概似函數(likelihood function)，並找出 θ 的最大概似估計量(MLE) $\hat{\theta}$。

   (b) 是否能找到 θ 的最小變異不偏估計量(UMVUE)？若不能，何故？若能，找出它。

(20%)

6. 設 X, Y 爲相互獨立之隨機變數，其中 $X \sim N(0, \sigma^2)$，Y 之p.d.f.如第4題之(**)所示。令 $T = X/\sqrt{Y}$，求 T 之機率密度函數。 (10%)

7. 雙變量中央極限定理(CLT)：假設 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ 爲相互獨立且具相同雙變量分布的隨機向量串。若其共同分布存在第二階動差且 $E[X_1] = 0 = E[Y_1]$，又 (U, W) 是具相同於 (X_1, Y_1) 之前二階動差(及交叉動差)的雙變量常態隨機向量。証明 $\sqrt{n}(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i, Y_i)$ 向 (U, W) 做分布收斂。 (10%)