

20%

1. 試求下列各積分值，並指出其結果在何集合內成立？

(a) $\int x \sin 2x dx$ (b) $\int x^2 \ln x dx$ (c) $\int x^2 e^x dx$ (d) $\int e^{2x} \cos x dx$

10%

2. (a) 試求拋物線 $y^2 = 4x$ 與直線 $2x - y = 4$ 所圍成區域之面積。

(b) 試求以方程式 $y^2 = 8x$ 與 $x = 2$ 所圍成之區域對 $x = 2$ 迴轉所產生迴轉體之體積。

10%

3. 試計算下列各積分。

(a) $\int_0^2 \int_0^1 \int_0^2 zy^2 \sin x dx dy dz$

(b) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$

10%

4. 試判斷下列級數是否收斂？並證明之。

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1))^{-k}$

15%

5. 試說明何謂 Gram-Schmidt Process. Consider the vector space R^3 with the Euclidean inner product. Apply the Gram-Schmidt process to transform the basis

$u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$ into an orthonormal basis (規格正交基底)。

15%

6. (a) 試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 之反矩陣 A^{-1} 。

(b) 求 A 之特徵根(eigenvalue)及特徵向量。

(c) Find an orthogonal matrix C such that $C^{-1}AC$ is a diagonal matrix, that is, find an orthogonal diagonalization of the matrix A .

10%

7. 試證明下列之圓錐曲線(Conic)方程式

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$
 經由線性轉換可寫成 $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$

之橢圓。

10%

8. Show that every 2×2 orthogonal matrix is of one of two forms, either $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$

or $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.