注意：未寫明演算過程者不給分！

1. 求值(化至最簡單形式)，或証明其不存在： (30%)

 (a) Gompertz成長模型 $\frac{d}{dt}P_t = kP_t(B - \ln P_t)$，求 $P_t = ?$（以 P_0 及時間 t 表示）

 (b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$

 (c) 不要應用三角函數恆等式，求 $\lim_{n\to\infty}(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n) = ?$

 (d) $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) - \ln(n)] = ?$

 (e) 令 $a \geq b > 0$, 則 $\lim_{x\to\infty}(a^x + b^x)^{1/x} = ?$

 (f) 設 a, b, c 均非負，求 $x^a y^b z^c$ 在 $x, y, z \geq 0$ 且 $x + y + z = 1$ 條件下之最大值及對應的 x, y, z。

2. 令 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,\ x > 0$; 又令 $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx,\ \alpha > 0, \beta > 0.$

 (a) 証明 $\Gamma(x)$ 在 $(0,\infty)$ 都有定義(其定義式收斂)。 (6%)

 (b) 証明 $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$. (7%)

3. 令 $f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 。求 $f(x)$ 的 Maclaurin 級數，並利用相關定理証明此級數確實處處收斂到 $f(x)$。【要明列所依據的定理】 (7%)

4. 一個定義在開區間 J 的函數 f 若滿足

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in J, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

則稱之爲凸函數(convex function)。若凸函數 f 在其定義區間處處可微分，令 $\ell_a(x)$ 爲 f 在 $a \in J$ 的切線，証明對任意 $x \in J$ 都可得 $f(x) \geq \ell_a(x)$。 (7%)

5. 令 A 爲一 $m \times n$ 矩陣

 (a) 証明：對 A 做基本列運算，不會改變列空間；行空間雖可能改變，但維度不受影響。(7%)

 (b) 証明：存在非奇異(nonsingular)矩陣 P, Q, 使 PAQ 左上角爲 r 階單位矩陣，其餘元素都是 0。証明此處 r 即是 A 的秩(rank)。 (5%)

6. 令 J_n 表示其元素都是 1 的 $n \times 1$ 矩陣，$\mathrm{A} = \mathrm{I}_n + k\mathrm{J}_n$。求 A^{-1}。 (5%)

7. 設A是一 $n \times n$ 實對稱矩陣(real symmetric matrix)，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 爲其特徵根。

 (a) 簡要証明 $\mathrm{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$。 (4%)

 (b) 証明行列式值 $|\mathrm{A}| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$。 (3%)

 (c) 令 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 找一個非奇異矩陣 P 使 PAP^{-1} 爲對角線矩陣。 (7%)

 (d) 若 A 代表在 R^3 的一個線性算子(linear operator)對應標準基底的代表矩陣，則採用甚麼基底時其代表矩陣是前項對角線矩陣？何故？ (4%)

8. 令 U 爲 V 的子空間。V 上一個線性算子 T 若滿足條件

$$\forall v \in V, T(v) \in U, \text{ 且 } \forall u \in U \quad \Rightarrow T(u) = u$$

則稱之爲 V 上到 U 的投影算子(the projection of V into U)。証明：矩陣 E 代表一個投影算子的充分且必要條件是 $E^2 = E$，且此時 E 的特徵根非 0 即 1。 (8%)