注意：未寫明充分的理由及演算過程者得不給分！

1. 計算(或証明其不存在)： (a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}(1-\cos t)\,dt}{x\sin x}$; (b) $\int x(\sin^{-1}x)\,dx$. (10%)

2. 求曲面 $\dfrac{x^{2/3}}{a^{2/3}}+\dfrac{y^{2/3}}{b^{2/3}}+\dfrac{z^{2/3}}{c^{2/3}}=1$ 包圍區域之體積。 (7%)

3. 令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} & 當\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & 當\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$
證明 f 在 $(0,0)$ 連續、偏導數都存在，但卻不可微分。 (10%)

4. 某廠商某產品的銷售情況平穩，每年銷售量爲 q 單位。該產品每批生產 x 單位則需成本 $C(x)=c_0+c_1x$。產品售出前每單位每年之倉儲成本爲 s。該產品可規劃在任何時間立即補充預定數量。建立一數學模型並據以求出最佳生產策略(最佳批量)。 (7%)

5. 設 $\alpha>0,\ \beta>0$。檢驗 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{y}{1+y^2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\tan^{-1}y}{\pi}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\tan^{-1}y}{\pi}\right)^{\beta}dy$ 的斂散性。 (6%)

6. 設 $0<p<1$，求冪級數 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\tan^{-1}k}{k(\ln(k+2))^p}x^k$ 之收斂區間，注意端點斂散性檢驗。 (8%)

7. (a) 陳述泰勒餘式定理(Taylor's Theorem with Remainder)。 (2%)
   (b) 若要利用泰勒多項式計算 $\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$ 準確至5位小數(誤差小於 0.5×10^{-5})，需用幾階的泰勒多項式來近似 $e^{-x^2/2}$？明確寫出所需的多項式。 (6%)

8. 令 V 是所有在 $(-\infty,\infty)$ 無窮可微分(任意階導數都存在)的函數所形成的集合。令微分算子 D 代表對 V 中成員取導函數，即 $Df=f'$；而 $I=D^0$ 對 f 不做任何改變，即 $If=f$。令 $p(t)$ 爲多項式 $a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$，則 $p(D)f=a_nf^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_1f'+a_0f$。
   (a) 証明 $\{e^{cx},xe^{cx},\ldots,x^{k-1}e^{cx}\}$ 是 $p(D)=(D-cI)^k$ 的核(kernel)的一組基底。 (6%)
   (b) 根據上述結果求微分方程式 $y'''-3y'+2y=0$ 的通解。 (6%)

9. 令 $\mathbf{X}$ 爲 $n\times m$ 矩陣，$\mathbf{X}^T$ 爲 $\mathbf{X}$ 之轉置。證明：$\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ 有相同的秩(rank)。 (6%)

10. 令 $\mathbf{B}$ 爲對稱的正定(positive definite)矩陣，求 $f(\mathbf{x})=(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})/(\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x})$ 之最大及最小值(若不存在，則說明理由)。 (6%)

11. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&.5&.5&.5\\.5&1&.5&.5\\.5&.5&1&.5\\.5&.5&.5&1\end{bmatrix}$ 求矩陣 $\mathbf{A}$ 的所有徵值(eigenvalue)，並找出一個正交矩陣(orthogonal matrix) $\mathbf{L}$ 使 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}$ 成爲對角線矩陣。最後，求 $\mathbf{A}$ 的反矩陣。 (10%)

12. 令 $\mathbf{A}$ 爲 n 階方陣，$\mathbf{C}$ 爲 m 階方陣，而 $\mathbf{B}$ 爲 $n\times m$ 矩陣。求 $\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{C}\\\mathbf{A}&\mathbf{B}\end{bmatrix}$ 的行列式值。 (6%)

13. 解釋名詞：(a) Gram-Schmidt orthogonalization; (b) **LDU** decomposition. (4%)