一. 若隨機變數 $X \sim U(0,1)$, $Y|X=x \sim B(n,\ x^2)$,

試求Y之機率分配, 期望值$E(Y)$與變異數$Var(Y)$。(10%)

二. 若隨機變數 $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},\ \ 0 < x < \infty$$

應用X之動差母函數$M_X(t) = E(e^{tX})$求算$E(X^k)$, $k = 1, 2, \cdots$ 之值 。(10%)

三. 假設X爲一個隨機變數, 令 $\mu_k' = E[(X-\mu)^k]$爲X的 k次中央動差,

其中$\mu = E(X)$. 定義

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3'}{(\mu_2')^{3/2}}; \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4'}{(\mu_2')^2} - 3$$

分別表示X 的偏態係數(skewness) 與峰態係數(kurtosis)。

(10%) 1) 若 $X \sim N(3, 25)$, 計算 γ_1與γ_2 。

(10%) 2) 若 $X \sim Gamma(2.5, 0.5)$, 計算γ_1與γ_2 並與(1) 比較。

四. 隨機變數 X, Y 的結合機率密度分配 ($p.d.f.$) 爲:

$$f(x,y) = 2\frac{e^{-2x}}{x},\ \ 0 < y < x < \infty$$

計算 $f_{Y|X}(y|x)$, $E(Y|X)$ 與 $Cov(X,Y)$。(10%)

五. 若隨機變數 X, Y均獨立且具有$U(0,1)$分配, 試求隨機變數 $W = X + Y$與

$V = XY$之累積分配函數 (c.d.f.)。(15%)

六. 若隨機變數 $X_1, X_2, \cdots, X_n$均獨立且同分配, 其共同變異數爲σ^2。證明

(5%) 1) $Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0, \forall i = 1, \cdots, n$.

(10%) 2) $Cov(S^2, \bar{X}) = 0$, 其中 $S^2 = \frac{\Sigma_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$。

(10%) 3) $\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2)$分配收斂 (converge in distribution) 並說明其極限分配 。

七. 若隨機變數 $X_1, X_2, \cdots, X_n$均獨立且同具有$B(1,\ p)$分配, 試求X之變異數

的 U.M.V.U.E.(uniformly minimum variance unbiased estimator).(10%)