

編號: F 363 系所: 統計學系

科目: 機率論

本試題是否可以使用計算機:  可使用,  不可使用 (請命題老師勾選)

注意: 須寫出推導過程, 否則不予計分。

1. 若隨機變數  $X_1$  和  $X_2$  的聯合動差生成函數值(jmgf)為

$$M(t_1, t_2) = (0.8e^{t_1} + 0.2)^{10} \exp(2e^{t_2} - 2), \text{ 試求}$$

(7%) (a)  $P\{X_1, X_2 = 0\} = ?$

(7%) (b)  $E[(X_1 - X_2)^2] = ?$

2. 若隨機變數  $X_1, \dots, X_n$  間獨立並都服從  $N(0,1)$ ,  $\Phi(x)$  為標準常態分佈的累積分配函數(cdf), 令  $Y_1 = \min(\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n))$  及  $Y_n = \max(\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n))$ , 試求

(7%) (a)  $Y_1$  和  $Y_n$  的聯合機率密度函數 (jpdf)?

(7%) (b)  $R = Y_n - Y_1$  的機率密度函數 (pdf)?

3. 若隨機變數  $X_1, \dots, X_N$  間獨立並都服從 Bernoulli(p),  $N$  服從 Poisson( $\lambda$ )。

令  $M = \max(X_1, \dots, X_N)$ , 試求

(7%) (a)  $P\{M \leq m\} = ?$

(10%) (b)  $E(M) = ?$  和  $\text{Var}(M) = ?$

4. 獨立的擲一公正骰子  $n$  次, 令  $X_i$  為第  $i$  次擲出的點數, 試求

(5%) (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} = ?$

(8%) (b)  $P\left\{ \prod_{i=1}^{100} X_i \leq 2^{100} \right\}$  的近似值為? (列出計算公式即可)

5. 若隨機變數  $X_1, \dots, X_n$  間獨立並都服從 Poisson( $\lambda$ ), 令  $\theta = e^{-\lambda}$ ,

(7%) (a) 試求  $\theta$  的不偏估計量之變異數的 CRLB?

(7%) (b) 試求  $\theta$  的一致最小變異不偏估計量(UMVUE)?

(7%) (c) 令  $\hat{\theta}$  為  $\theta$  的最大概似估計量(MLE), 試求  $E(\hat{\theta})$ ?

6. 若隨機變數  $X_1, \dots, X_n$  間獨立並都服從  $\text{EXP}(\theta)$ ,

(7%) (a) 試求  $P(X > 1) = e^{-1/\theta}$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴下限?

(7%) (b) 試求  $H_0: \theta \leq \theta_0$  對  $H_1: \theta > \theta_0$  的一致最有力檢定(UMP test)?

(7%) (c) 試求  $H_0: \theta \leq \theta_0$  對  $H_1: \theta > \theta_0$  的廣義概似比檢定(GLR test)?