

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機。請於答案卷(卡)作答，於本試題紙上作答者，不予計分。

一、選擇題 50 分(每題五分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2} =$ (a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) ∞

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} =$ (a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) 無意義

3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!} =$ (a) $2e$ (b) $3e$ (c) $3e^2$ (d) ∞

4. 求 $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$ (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $1-e$

5. 求 $\iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy =$ (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

6. 求 $\int \sin(\ln x) dx =$ (a) $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$

(b) $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

(c) $-\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

(d) $-\frac{1}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

7. 求 $\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx =$ (a) $\frac{5}{8} \ln \frac{2x^4}{x^4+2} - \ln \frac{2x^4}{x^4+1} + C$

(b) $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4-2} - \ln \frac{x^4}{x^4-1} + C$

(c) $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4+2} - \ln \frac{x^4}{x^4+1} + C$

(d) $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4+2} + \ln \frac{x^4}{x^4+1} + C$

8. 求由曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ ， $x + y + z = 2a$ ($a > 0$) 所界物體的體積為 (a) $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^3$ (b) $\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3$

(c) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (d) $\frac{8}{3}\pi a^3$

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$ (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) e (d) ∞

10. 求 $f(x) = \sqrt{x}(x-5)^{\frac{1}{3}}$ 在區間 $[0,6]$ 上的極小值 (a) $6^{\frac{1}{2}}$ (b) $-6^{\frac{1}{2}}$ (c) $-2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ (d) $-3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

二、非選擇題 50 分

1. (10%) 證明不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ，式子中 n 為任意自然數。

2. (10%) 試求 $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}$ 。

3. (10%) 求 $(2x+y)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{x} + y + 1$ 在點 $(1, -1)$ 上的切線。

4. (10%) 求 $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ 之值。

5. (10%) 證明 $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}$ 。