國立成功大學 106 學年度碩士班招生考試試題

系　　所：體育健康與休閒研究所

考試科目：運動生物力學

考試日期：0214，節次：3

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機。　請於答案卷(卡)作答，於本試題紙上作答者，不予計分。

基本知識（如果你已熟悉向量運算，可直接開始答題）：

假設一固定於地球的座標系（使用卡氏座標系）的三個方向為 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$。這三個方向彼此互相垂直，且皆為量值=1 的單位向量。對於一般量值不為 1 的向量，**這裡會加上底線代表是向量。**

假設向量 $\underline{a}$ 在三個方向的分量為已知（分別為 a_1, a_2, 和 a_3），即 $\underline{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$。向量 $\underline{a}$ 的量值（以 $|\underline{a}|$ 的符號表示）為，$|\underline{a}| = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$。與之類似，假設向量 $\underline{b} = b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}$，則其量值 $|\underline{b}| = \sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}$。

所謂兩向量的內積，是其相對應的分量乘積的總合，為一純量。例如 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的內積（符號為 $\underline{a}\bullet\underline{b}$），即為 $\underline{a}\bullet\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$。此內積純量也可以用另一種方式求出，即 $|\underline{a}||\underline{b}|(\cos\theta)$。這裡的 θ 為兩向量間的夾角。

所謂兩向量 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的外積（其結果為向量，符號為 $\underline{a}\times\underline{b}$），定義為：

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{x} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{y} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{z}$$

。另一種求外積的方式為分別求出其量值和方向。即 $\underline{a}\times\underline{b}$ 的量值為 $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|(\sin\theta)$。而方向（量值=1）為依據右手定則，同時垂直於 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的方向。這裡的右手定則，是指當右手的四指先指向 $\underline{a}$，再朝的 $\underline{b}$ 的方向卷曲，則此時拇指的方向即為所求的方向。此外，卡氏座標系的三個方向有這樣的特性：$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$，$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$；$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$。

正式的題目從這裡開始

1. (25%) 註：第一題不需要以向量計算。第二題開始需要向量之計算。

   (1.1)何謂牛頓三大運動定律？(此題為 10%，而第一題的其他小題皆為 5%)

   (1.2)一運動員肩膀高度為 H，將質量為 m 的球於肩膀的高度，水平向前推出距離 D 之後釋放。假設其推力 F 為定值，又假設推力所作的功完全轉換為球的動能。則球被釋放時的速率為何？

   (1.3)若不計空氣阻力，球落地時與被釋放時之間的水平距離為何？

   (1.4)若此肩膀高度(H)開始將球推出時與水平面有一仰角，則想要讓球落地時有最遠距離，此仰角應大於或等於還是小於 45 度？

2. (15%)若向量 $\underline{a} = 4\hat{x} + 3\hat{y}$，向量 $\underline{b} = 2\hat{x}$。以 $\underline{a}\bullet\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 的式子，求出 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的內積。此外，若兩向量間夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 為何？而 $|\underline{a}||\underline{b}|(\cos\theta)$ 是否等於剛剛算出的內積？

3. (10%)如上題同樣的 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 兩向量。先以 $\underline{a}\times\underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{x} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{y} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{z}$ 的式子求出兩向量之外積。而 $|\underline{a}||\underline{b}|(\sin\theta)$ 是否等於剛剛算出的外積量值？

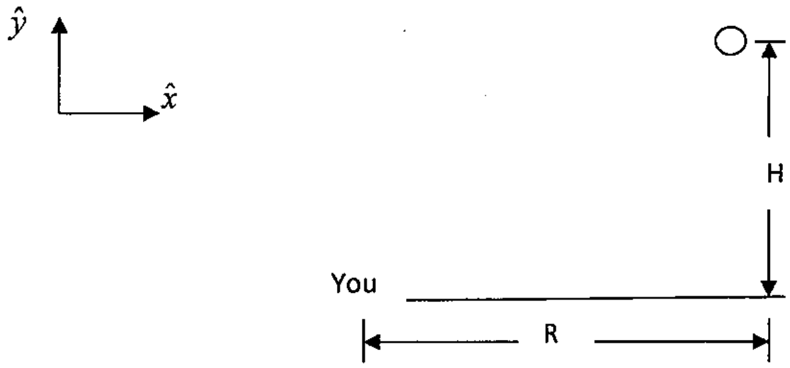
國立成功大學 106 學年度碩士班招生考試試題

系　所：體育健康與休閒研究所

考試科目：運動生物力學

考試日期：0214，節次：3

4. (15%)角動量為向量，其定義必須要有一個參考點。假設一質點 P（質量為 m）的位置是 $\underline{r}$（從參考點 O 到 P 的位置向量），速度是 $\underline{v}$，則質點 P 以 O 為參考點的角動量 $\underline{H}$ 定義為其位置向量和線動量的外積，即 $\underline{H} = \underline{r}\times\underline{L} = \underline{r}\times(m\underline{v}) = m\,\underline{r}\times\underline{v}$。以這樣的定義，若你靜止不動，在你正前方 R 公尺處有大樓高 H 公尺。樓頂有人將質量 m 的球朝你以速率 v_0 水平方向拋出。即剛開始時，從你腳底到球的位置向量為 $R\hat{x}+H\hat{y}$，而球初速則為 $-v_0\hat{x}$。在球剛被拋出和當球即將觸地時，分別求出球的角動量（以你腳底為參考點，且不計空氣阻力）。假設重力加速度為 $-g\hat{y}$（即量值為 g 而方向為 $-\hat{y}$）



5. (35%) 假設手臂可當成上臂 A 和前臂 B 兩粗細均勻的剛體肢段，質心分別為 A* 和 B*且皆位於肢段中間。上臂總長 L_A，質量 m_A；前臂總長 L_B，質量 m_B。固定於地球的座標系的三個方向為 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$，其原點 O 位於肩關節中心。上臂相對於 $\hat{x}$ 方向以逆時針（繞 $\hat{z}$ 軸）轉了 θ 角，前臂相對於上臂也是繞 $\hat{z}$ 軸轉了 φ 角。並假設重力加速度為 $-g\hat{y}$（即量值為 g 而方向為 $-\hat{y}$）

(5.1)請將 O 到 A*和 O to B*這兩個向量表示於 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ 的座標系。

(5.2)若上臂以 A*為旋轉中心，$\hat{z}$ 為轉軸的轉動慣量為 I_a。則上臂以 O 為旋轉中心，$\hat{z}$ 為轉軸的轉動慣量為?

(5.3)呈上題，若前臂以 B*為旋轉中心，$\hat{z}$ 為轉軸的轉動慣量為 I_b。整條手臂（含上臂和前臂）以 O 為旋轉中心，$\hat{z}$ 為轉軸的轉動慣量為?（註：5.2 和 5.3 要用到平行軸定理）

(5.4)若上臂相對於地球的角速度為 $\dot{\theta}\,\hat{z}$（上面加一點的符號代表對時間的一次微分），前臂相對於地球的角速度為 $\dot{\varphi}\,\hat{z}$。請分別求出 A*和 B*的速度（從固定於地球的座標系觀察的速度）。

(5.5)若 A*和 B*的加速度分別為 $\underline{a}_A$ 和 $\underline{a}_B$，則在肩關節施予上臂的力為何?