國立成功大學 107 學年度碩士班招生考試試題

系　所：體育健康與休閒研究所

考試科目：運動生物力學

考試日期：0206，節次：3

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機。　請於答案卷(卡)作答，於本試題紙上作答者，不予計分。

基本知識（如果你已熟悉向量運算和微積分，可直接開始答題）：

假設一固定於地球的座標系（使用卡氏座標系）的三個方向為$\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$。這三個方向彼此互相垂直，且皆為量值=1 的單位向量。對於一般量值不為 1 的向量，這裡會加上底線代表是向量。

假設向量 $\underline{a}$ 在地球座標系的三個方向的分量為已知（分別為 a_1, a_2, 和 a_3），即 $\underline{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$。向量 $\underline{a}$ 的量值（以$|\underline{a}|$的符號表示）為，$|\underline{a}| = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$。與之類似，假設向量 $\underline{b} = b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}$，則其量值$|\underline{b}|$

$= \sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}$。

所謂兩向量的內積，是其相對應的分量乘積的總合，為一純量。例如 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的內積（符號為 $\underline{a}\cdot\underline{b}$），即為 $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$。此內積純量也可以用另一種方式求出，即$|\underline{a}||\underline{b}|(\cos\theta)$。這裡的 θ 為兩向量間的夾角。

所謂兩向量 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的外積（其結果為向量，符號為 $\underline{a}\times\underline{b}$），定義為：

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{x} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{y} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{z}$$

。另一種求外積的方式為分別求出其量值和方向。即 $\underline{a}\times\underline{b}$ 的量值為$|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}|(\sin\theta)$。而方向（量值=1）為依據右手定則，同時垂直於 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 的方向。這裡的右手定則，是指當右手的四指先指向 $\underline{a}$，再朝的 $\underline{b}$ 的方向卷曲，則此時拇指的方向即為所求的方向。此外，卡氏座標系的三個方向有這樣的特性：$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$，$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$；$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$。

假設 f 為 x 的函數，即 f=f(x)。通常這些函數 f(x)和 g(x),可以簡寫成 f 和 g。所謂 df/dx，即 f 對 x 的微分，定義為當 h 趨近 0 時，(f(x+h)-f(x))/h 的值。從定義可證明 $dx^n/dx = nx^{n-1}$; $d\sin(x)/dx = \cos(x)$; $d\cos(x)/dx = -\sin(x)$; $d\ln x/dx = 1/x$; $de^x/dx = e^x$；還有一些常用公式如 product rule: d(fg)/dx = (df/dx)g + f(dg/dx), 即把兩函數的乘積微分，等於前者的微分乘以後者，加上後者的微分乘以前者； chain rule: 若 f=f(x)且 x=x(t)，則 df/dt = (df/dx)(dx/dt)，即 f 對 x 的微分乘以 x 對 t 的微分。

正式的題目從這裡開始 (每大題裡的小題都是由淺入深)

1. If $f(x)= x^2\sin(x)$, then what is df/dx？　If g(x)=cos(x) and $x=\ln t$, then what is dg/dt =？　(10%)

2. The human body can be modeled as 2 parts: the upper body A (with mass=m_A) and lower body B (with mass=m_B). Suppose the gravitational acceleration is $-g\hat{y}$ (which means $\hat{y}$ is the upward direction). (每小題 5%，共 20%)

2.1 If the person is standing still, what is the ground reaction force (GRF, which is a vector)？

2.2 In performing a jump, the person first squats down and then jumps upward. Does the GRF magnitude become smaller or bigger (compared to the value of still standing) during the initial squatting motion？

2.3 At some time instant the upper body A has acceleration $a_1\hat{x} + a_2\hat{y}$. What is the force applied from A to B?

2.4 At some time instant the accelerations of A and B are $\underline{a}_A$ and $\underline{a}_B$, respectively (both are vectors). What is the current GRF?

3. 洪七公和歐陽鋒的質量分別為 50 和 80 kg，兩人在水平的冰面上對掌。一開始兩人都是靜止，兩人互推後進行反向直線運動。忽略摩擦力及空氣阻力的影響。(每小題 5%，共 25%)

3.1 兩人互推後進行運動的方向相反，主要可由牛頓的哪一個運動定律來解釋？

3.2 若兩人分開後，洪七公的速率為 10 m/s，則歐陽鋒的速率為？

3.3 若互推時間 0.5 秒，且兩人間的推力從 0 開始直線上升（與經過時間成正比）。則分開瞬間推力量值為？

3.4 在分開瞬間，洪七公質心位置與原本位置的水平距離為？

3.5 以作功的定義，計算兩人間的推力對洪七公所作的功。所得的值是否與洪七公增加的動能相同？

4. 小強在練習推鉛球。假設小強投出的初速量值固定為 v，出手高度為 h，重力加速度量值為 g。鉛球可被當成質點，空氣阻力可忽略。(每小題 5%，共 20%)

4.1 若出手時鉛球速度方向為水平，則鉛球落地時與出手時的水平距離為？

4.2 若出手時鉛球速度方向與水平的夾角為 θ(>0)，鉛球飛到最高處時與地面的距離為？

4.3 鉛球落地時與出手時的水平距離為？

4.4 要讓鉛球落地時與出手時的水平距離最遠，則 θ 應為？

5. 在牆壁 A 上有一扇門 B。門寬 w，門高 h。固定於牆壁座標系的三個彼此垂直的單位向量為 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$（實際上 $\hat{a}_1$ 的方向為指出紙面）。固定於門上座標系的三個彼此垂直的單位向量為 $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$。當門關著時，$\hat{a}_1 = \hat{b}_1$，$\hat{a}_2 = \hat{b}_2$。不論門是開還是關，都會是 $\hat{a}_3 = \hat{b}_3$。(每小題 5%，共 25%)

5.1 門左下角為 P 點，門右下角為 Q 點，門框的右上角為 S。從 P 指到 Q 點的向量 $\underline{r}_{PQ}$ 可以表示為 $\underline{r}_{PQ} = w\hat{b}_2$ (即量值 w 乘以方向 $\hat{b}_2$)。以類似的方式，若向量 $\underline{r}$ 為從 Q 指到 S 點的向量，$\underline{r}$ 應該表示為？（提示：向量的加法為頭連接尾）

5.2 當門開了角度 θ 時，請將 $\underline{r}_{PQ}$ 以 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ 來表示。

5.3 假設 θ 為時間的函數，θ=2t。則門相對於牆壁的角速度量值和方向為？

5.4 假設 θ=sin(t)。從牆壁座標系觀察 Q 點的速度，可寫成 ${}^A\underline{v}^Q$ (velocity of Q in reference frame A)。從 5.2 題如果得出 $\underline{r}_{PQ} = r_1\hat{a}_1 + r_2\hat{a}_2 + r_3\hat{a}_3$，則 ${}^A\underline{v}^Q = (dr_1/dt)\hat{a}_1 + (dr_2/dt)\hat{a}_2 + (dr_3/dt)\hat{a}_3$。請以此計算 ${}^A\underline{v}^Q = ?$

5.5 假設 θ=sin(t)。門相對於牆壁的角速度向量 $\underline{\omega} = (d\theta/dt)(-\hat{b}_3)$。此外，已知 ${}^A d\hat{b}_2/dt = \underline{\omega} \times \hat{b}_2$（即把 $\hat{b}_2$ 在 A 座標系對時間微分，對於角速度與 $\hat{b}_2$ 的外積）。以此方式計算 ${}^A\underline{v}^Q = {}^A d\underline{r}_{PQ}/dt = ?$