

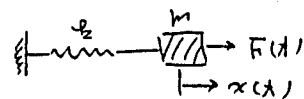
1. 如圖示之彈簧質量系統, 於 $t=0$ 受一單位衝擊力作用, 其運動方程式可表為 $m\ddot{x} + kx = \delta(t)$

$\delta(t)$ 為 Dirac Delta function。若初值為 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

a. 利用 Laplace 變換求 $x(t)$ 。

b. $\dot{x}(t)$ 於 $t=0$ 是否為連續? 說明之。

c. 利用 a 之結果求任意作用力 $F(t)$ 作用下之 $x(t)$ 。



2. 設 $u(x, y)$ 適合 Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ 及圖 (a) 所示邊界條件。

a. 試證明重疊原理適用於 Laplace 方程式。

b. 利用 $u(x, y)$ 求圖 (b) 之解 $v(x, y)$ 。

c. 對於一般之偏微分方程式 $L(u) = 0$, 此法是否適用? 對微分運算子 L 應有何限制?

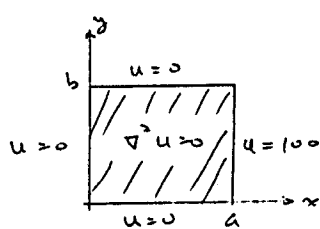


圖 (a)

3. 利用 Lagrange multiplier 證明: 所有等面積平行四邊形中, 以正方形之周長為最優。

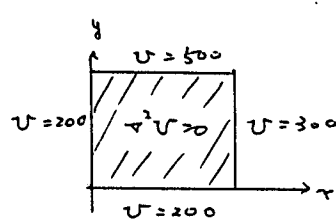


圖 (b)

4. a. 若已知一組實驗數據 (x_i, y_i) $i=1, 2, \dots, n$,

而欲以 m -次多項式 $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ 表示之, 而使其誤差平方為最小, 則應如何決定 a_i 。

b. 若以 Fourier 級數表示該組數據, 則應如何決定係數 a_i 。

5. 如圖示 R 區域內各點溫度為 20°C 。若突然在四邊變化溫度, 保持為 100°C , 則有熱流 (heat flow) 發生。

a. 請列出此問題以 x, y 座標表示之基本數學模式。

b. 若以曲線座標表示以上數學模式, 請列出轉換關係及變換後形式。

(僅須清楚列出數學模式, 無需解之)。

