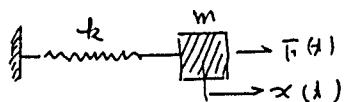


1. 如圖示之彈簧質點受一單位衝擊力作用, 其運動方程式可表為:

$$m\ddot{x} + kx = \delta(t)$$

$\delta(t)$  為 Dirac-Delta function. 若初值為  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

- 利用 Laplace 變換求  $x(t)$ .
- $x(t)$  於  $t=0$  是否為連續? 說明之.
- 利用 a. 之結果求在任意作用力  $F(t)$  作用下之  $x(t)$ .



2.  $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1)$

積分  $I$  可利用複變函數之殘值定理獲得。試說明於複數平面  $z$  應採用何種路徑積分, 並說明為何需  $0 < a < 1$ 。

3. a. 若  $R$  為不含原點之單連區域 (simply connected region), 試記線積分

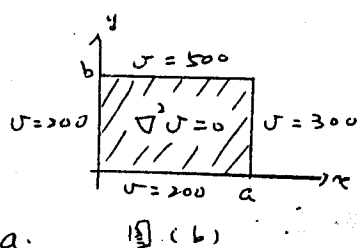
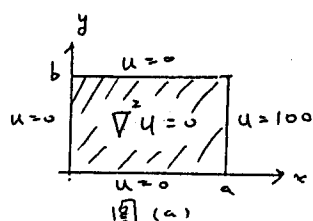
$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

每積分路徑無關, 且  $U(x, y) = \tan^{-1}(y/x) + C$ .

- 是否可利用 Green's Theorem 求環積分  $I = \oint_{C_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$   
 $C_1$  為圓環路徑  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 求積分  $I$  之值。

4. 設  $u(x/a, y/b)$  適合 Laplace 方程式  $\nabla^2 u = 0$  及圖 (a) 所示邊界條件。

- 試證明重疊原理適用於 Laplace 方程式。
- 利用  $u(x, y)$  求圖 (b) 之解  $v(x, y)$ 。
- 對於一般之偏微分方程式  $L(u) = 0$ , 以上方法是否適用? 對微分運算子  $L$  應有何限制?



5. a. 若已知一組實驗數據  $(x_i, y_i) \quad i=1, 2, \dots, n$ .  
 而欲以一近似多項式  $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$   
 表示之, 而使其誤差平方為最小, 則應如何決定  $a_i$ .  
 b. 若以 Fourier 級數表示該組數據, 則應如何決

(接下頁)

6. 如圖示R區域內各點溫度為 $20^{\circ}\text{C}$ ,若突然在四週變化溫度,保持為 $100^{\circ}\text{C}$ ,則有熱流(heat flow)發生。

a. 請列出此問題以 $x, y$ 座標表示之基本數學模式。

b. 若以曲線座標表示以上數學模式,請列出轉換關係及變換後形式。

(僅須清楚列出數學模式,無需解之)

