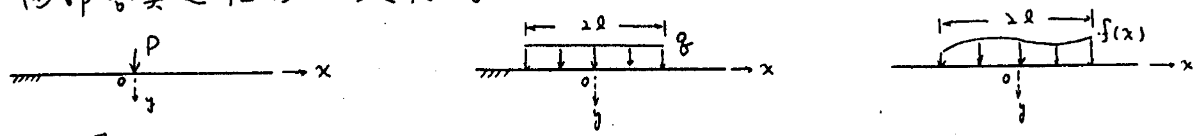
5/16 (4)

# 國立成功大學 76 學年度 土木工程研究所考試(工程數學 甲乙組試題)



1. 一彈性半平面 (elastic half plane) 受一集中力 P 作用於原點 (如圖(a)),
內部各點之位移函數求得為 $G(x,y)$



圖(a) 圖(b) 圖(c)

5% (a) 設一大小為 $H$ 之集中力作用於 $x=\xi$, $y=0$ 處, 試決定其位移函數

10% (b) 試決定圖(b), (c) 情況下之位移函數.

2. 常微分方程式 $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$
其解為 Laguerre polynomials $L_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$

10% (a) 試將此方程式化為標準之 Sturm-Liouville 方程式型式:

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

決定出 $r(x)$, $q(x)$, $\lambda$, $p(x)$

5% (b) 証明並說明 $\int_0^\infty p(x) L_n(x) L_m(x)\, dx = 0$ $(m \neq n)$

5% (c) 欲將一連續函數 $f(x)$, $x>0$ 表示為 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x)$ 型式, 決定係數 $C_n$

3. 一桿件長為 $l$, 各點溫度於 $t=0$ 時為 $f(x)$, 兩端溫度隨時變化, 分別為 $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$。設考慮傳導與幅射, 其控制方程式為:

$$k^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \lambda \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

其中 $k$, $\lambda$ 為已知常數

10% (a) 令 $\phi = \psi e^{-\lambda t}$, 試列出以 $\psi(x,t)$ 表示之數學模式

10% (b) 若 $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = l e^{-\lambda t}$. 令 $\psi = \psi_1 + \psi_2$ 可將上列數學模式分為兩個較簡易之子題, 試據以求解 $\phi(x,t)$。

4. 設 $f(x)$, $-1 \le x \le 1$ 為一連續函數且 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ 為已知值

10% (a) 試以 Lagrangian 型式, 將 $f(x)$ 以一 2 階多項式近似表示之,
即 $f(x) = l_0(x) f(-1) + l_1(x) f(0) + l_2(x) f(1)$
其中 $l_i(x)$ $(i=0,1,2)$ 為 2 階多項式。

10% (b) 由以上結果, 分別求 $f'(0)$, $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ 之近似數值。

5.

5% (a) 試作图表示 $\cos 2\theta \geq 1 - \frac{4\theta}{\pi}$ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

10% (b) 利用 (a), 証明: 以圆心在原点, 半徑為 $R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 之圆弧為 contour 之 contour integral

$$\lim_{R \to \infty} \left( \int_c e^{-z^2} dz \right) \to 0 \qquad z \text{ 為 complex variable}$$

6. $F = 1 + x + y + (y')^2$, $y = f(x)$

10% 試決定 (a) total differential $dF$

(b) Variation $\delta F$