土木工程研究所

國立成功大學 77 學年度碩士班入學考試（工程數學 試題）共 1 頁 第 1 頁

20% 1. 求解代數方程式之根，可利用 Newton-Raphson 法，其公式為：

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

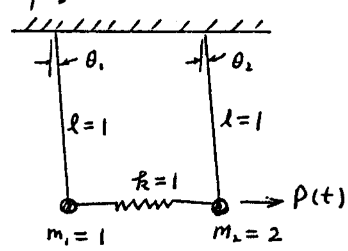
(a) 試說明其數學依據。此法是否必定收斂？理由何在？可用作圖說明之。 (b) 利用本法求 $x = -e^x$ 之根，至少精確至小數點以下第三位。

20% 2. 證明：

$$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{n}\,dS = \begin{cases} 0 & \text{若原點 } \vec{r}=0 \text{ 在 } S \text{ 之外} \\ 4\pi & \text{若原點 } \vec{r}=0 \text{ 在 } S \text{ 之內} \end{cases}$$

式中 S 為一封閉曲面，$\vec{n}$ 為其向外法線，$\vec{r}$ 為位置向量，其大小為 $|\vec{r}|$。

20% 3. 二單擺以彈簧連接，如圖示，彈簧質量可不計。



(a) 試推導此振動系統之數學模式。

(b) 考慮微振情況，可令 $\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$。試求其自由振動下之自然頻率與基本振態。

(c) 若此系統受一已知外力 P(t) 作用，產生微振。說明如何由數學方法決定其振動狀態。

20% 4. 波在直桿中之傳動（longitudinal wave in rod），可用以模擬打樁等物理問題。設若直桿之斷面為 A，斷面周長為 a，已知桿表面各點所受之摩擦阻抗與其位移 $u(x,t)$ 成正比，x 表桿各點之座標，t 表時間。若在 $x=l$ 端，桿固定不動，在 $x=0$ 端恆受外力 P，桿由完全靜止開始運動，試推導以 $u(x,t)$ 表示其運動之控制方程式，並列出其邊界條件與起始條件；再以 Laplace transform 解之。

（註：控制方程式形式為： $u_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt} + bu$ ）

20% 5. 判別下列各陳述之正誤，並說明所依據之理由。

(1) 若一函數 $f(t)$, $t>0$ 之 Fourier transform 存在，則其 Laplace transform 必存在，反之亦然。

(2) 週期為 2π 之函數 $f(x)$ 之 Fourier series expansion 為 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 其導數 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n\sin nx + b_n\cos nx)$，且必收斂。

(3) 以 power series 解 $xy'' + y' - y = 0$，將 $y(x)$ 對 $x=0$ 展開，求得其 indicial equation 之根為重根。

(4) 求 $I = \int_0^{\pi/2}[(y')^2 - y^2]\,dx$, $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=0$ 之極小值，可由 Variation 方法，得其 Euler equation 為 $y'' - y = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.