

1. (20分) 假設隨機變數 (random variable)  $X$  與  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 如下，試問  $X$  與  $Y$  是否獨立？

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y} & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. (20分) 有一個質點由數線原點開始，沿著數線左右移動，每次移動一個單位的距離。每次移動時，它向左移的機率為  $p$ ，向右移的機率為  $(1-p)$ 。試求在移動  $n$  次之後，它所在位置座標的期望值 (expected value) 與變異數 (variance)。
3. (30分) 試證明隨機變數 (random variable)  $X$  與  $Y$  不可能有下列性質：

$$E(X) = 3, E(Y) = 2, E(X^2) = 10, E(Y^2) = 29, E(XY) = 0$$

其中  $E(X)$  為隨機變數  $X$  的期望值 (expected value)， $E(Y)$  為隨機變數  $Y$  的期望值等。

4. (30分) 軍方目前所使用的某種飛彈命中率為 50%。為了提高命中率，軍方想改用另一種較新型的飛彈。試射十枚的結果，新型飛彈命中七枚。試檢定分析該種新型飛彈是否真的命中率較目前所使用的為高。