1. 證明 $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ (10%)

2. 證明第二種圓柱函數

$$Y_\nu(x)\equiv\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$, ν 為任何正實數 (10%)

亦為 Bessel 氏微分方程式之一解

3. (a) 求 $\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} e^{-st}\,dt$ (5%)

(b) 求 $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (5%)

4. 說明 $u\equiv u(x,y)$, $v\equiv v(x,y)$ 具相關之充要條件為何. (6%)

5. 說明 向量梯度 ∇u, 向量散度 $\nabla\cdot\vec{u}$, 向量旋度 $\nabla\times\vec{u}$ 之實際含義。 (12%)

6. 已知 $A(x,y)\equiv 2xy-ix^2y^3$,

求 ∇A , $\nabla\cdot A$ (8%)

7. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-x}y=1-x$

之特解 (8%)

8. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+13y=27e^{-2x}x^3$ (8%)

9. 二次式 $Q \equiv X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix} X$, $X^T = [x_1\ x_2\ x_3]$

利用轉換式 $X = BY$, 可化成 $Q = Y^T D Y$,

試決定 B 使得 D 為主對角線矩陣(Diagonal Matrice)。此二次式是否為正定(positive definite) (12%)

10. (a) 求 $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(x=0) = 0$, $y'(x=1) = 0$

之特徵函數(characteristic function)和特徵值(characteristic value) (8%)

(b) 利用(a)所求得之特徵函數,求解

$$y'' + \pi^2 y = f(x),$$ (8%)

$$y(x=0) = 0, \quad y'(x=1) = 0$$

其中 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$