1. 某線性一階常微分方程式可寫成：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

請證明此方程式之解爲：

$$y = \exp(-\int Pdx)\,[\int Q\exp(\int Pdx)\,dx + C] \qquad (10\%)$$

2. 某一組曲線可表示爲 $x^2 + y^2 - cx = 0$，其中 c 爲常數。試求和此組曲線正交的曲線。 (10%)

3. 解下列微分方程式：$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4x + 8x^3$ (10%)

4. (a) 已知 y 和 x 之關係如下式所示，求在 $x = 0$ 時之 y 值。

$$y = \frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}$$

(b) 有一函數 Φ 與 x 之關係如下所示：

$$\Phi = -(\frac{RT}{V})\,[\ln(1 - x) + (1 - a)x + Bx^2]$$

爲決定當 x 趨近 0 時之 Φ/x 值，我們將上式表示爲：

$$\frac{\Phi}{x} = RT\,[A_1 + A_2x + A_3x^2 + \cdots]$$

則 A_1、A_2、A_3 各等於什麼？ (10%)

5. Gamma function $\Gamma(n)$ 之定義如下：$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$

試求 $\Gamma(\frac{1}{2})$ 之值。 (10%)

6. 若 F(s) 爲某時間函數 f(t) 的 Laplace 轉換式，則

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} F(s)\exp(st)\,ds$$

令 $s = i\omega$，$\omega = k\pi/T$，$\Delta\omega = \pi/T$，則上式可表示成一無限項的和：

$$f(t) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\frac{ik\pi}{T})\exp(\frac{ik\pi t}{T})$$

請說明在什麼條件下，此無限項的和能寫成下列有限項和。

$$f(t) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{N/2} F(\frac{ik\pi}{T})\exp(\frac{ik\pi t}{T}) \qquad (10\%)$$

7. 某粒子在直角座標(x, y, z)的位置隨時間t之變化關係爲：

$$x = 2t^2, \quad y = t^2 - 4t, \quad z = 3t - 5$$

試求此粒子在時間t = 1時，在$(i - 3j + 2k)$所指方向的加速度。其中i、j、k分別爲x、y、z三個方向的單位向量。 (10%)

8. 材料的Engineering Stiffness常數可以表示成如下的3×3矩陣[Q]：

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}$$

同樣的，該材料的Compliance常數可表示爲3×3矩陣[S]：

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$$

此二矩陣有一相關式$[S] = [Q]^{-1}$。請將[S]矩陣的所有S_{ij}表示爲Q_{ij}的函數。 (10%)

9. (a) 有二複數函數如下：$e = e_0 \exp(i\omega t)$，$\sigma = \sigma_0 \exp[i(\omega t + \delta)]$。若$G^*$的定義爲$G^* = \sigma/e$，試將$G^*$表示爲$G_1 + iG_2$之形式。(b) 若$J^* = 1/G^*$，試將$J^*$表示爲$J_1 - iJ_2$之形式。 (10%)

10. 如下圖所示。A點和L線之距離爲2 m，B點和L線之距離爲5 m，A點和B點相距5 m。試決定L線上之一點C，使A-C-B長度和爲最小（即求λ之值）。 (10%)