

※ 考生請注意：本試題不可使用計算機。請於答案卷(卡)作答，於本試題紙上作答者，不予計分。

1. (20%) 當渾水流場是處於平衡階段時，泥沙因重力作用向下的沉降量等於紊流作用使泥沙向上的擴散量，此時垂直一維泥沙濃度 C_v 之擴散方程式可以表示為

$$\varepsilon_z \frac{dC_v}{dz} + w_0 C_v = 0$$

其中 ε_z 為泥沙擴散係數， w_0 為泥沙終端沉降速度， z 為垂直座標。假設 ε_z 及 w_0 均為常數，在接近底床處 $z = a$ 處之泥沙濃度 $C_v = C_{va}$ ，試求解泥沙濃度 $C_v(z)$ 之分布並說明接近水表面處 ($z = h$) 之泥沙濃度。

2. (20%) 已知細顆粒泥沙在靜水中的沉降運動方程式可以寫成

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{36\nu_f}{(2G+1)d^2} \omega = \frac{2(G-1)g}{(2G+1)}$$

其中 G 為泥沙比重， d 為泥沙粒徑， ν_f 為流體運動黏滯度， g 為重力加速度， $\omega = \omega(t)$ 為泥沙沉降速度， t 為時間。起始條件 $\omega(0) = 0$ ； $t \rightarrow \infty$ 時之終端沉降速度 $\omega_0 = [(G-1)gd^2] / (18\nu_f)$ 。試求解此一階線性非齊次常微分方程式。

3. (20%) 已知粗顆粒泥沙在靜水中的沉降運動方程式可以寫成

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{3C_D}{2(2G+1)d} \omega^2 = \frac{2(G-1)g}{(2G+1)}$$

其中 G 為泥沙比重， d 為泥沙粒徑， C_D 為流體阻力係數(假設為常數)， g 為重力加速度， $\omega = \omega(t)$ 為泥沙沉降速度， t 為時間。起始條件 $\omega(0) = 0$ ； $t \rightarrow \infty$ 時，終端沉降速度 $\omega_0 = \sqrt{4(G-1)gd / (3C_D)}$ 。試求解此一階非線性非齊次微分方程式。

4. (20%) 已知 $y = y(t)$ ，求解下列二階非齊次常微分方程式

$$y'' + 2y' + y = \cos(\sqrt{2}t) \quad \text{with } y(0) = 0, \text{ and } y'(0) = 0.$$

5. (20%) 已知 $w = w(x, t)$ ，求解下列一階齊次偏微分方程式

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{with } w(x, 0) = 0, \text{ and } w(0, t) = t.$$

(以上五題，在求解過程中若發現有條件不足時，可以自行給予適當之假設條件。)