

1. 解微分方程式

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0, \quad y(1) = 1. \quad (12\%)$$

2. 解微分方程式

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$$

並繪出解曲線 (12%)

3. 已知放射性元素之放射強度與當時之元素質量成正比，於時間 $t = 0$ (日) 測之，得某元素之質量為 3 克，於 $t = 30$ (日) 測之，得質量為 2.7 克，試問該元素質量僅剩 1 克時係幾日後？ (12%)

4. 已知二向量 \vec{u}, \vec{v} 分別為 $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$,

$$\vec{v} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z\alpha\vec{k},$$

求 (a) $\text{curl}(\vec{u} \times \vec{v}) = ?$ (b) $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = ?$ (12%)

5. 有兩曲線 C_1, C_2 分別表示之為

$$C_1: \vec{r}_1(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + t\vec{k},$$

$$C_2: \vec{r}_2(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + \frac{\pi}{3}\vec{k},$$

試求該二曲線相交點之交角。 (12%)

6. z 為複變數，即 $z = x + iy$ ，試求下列級數之收斂範圍。

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n z^{2n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} (z+2i)^n$$

(12%)

7. 有一作用力 $\vec{P} = 4xy\vec{i} - 8y\vec{j} + 2\vec{k}$ (newton) 施力於一運動體，由 A 點 $(0, 0, 0)$ 至 B 點 $(3, 9, 9)$ 沿直線段 $y=3x$, $z=3x$ 移動，試求作功多少？

[註：座標單位為 m]

(12%)

8. $z = x + iy$, $w = u + iv$,

z 平面上區域 $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$ 經 $w = \sin z$ 映像至

w 平面上，其對應之區域為何？繪圖示之。

(16%)