

1. 解下列二階變係數常微分方程式: (15%)

$$t y'' + (1-2t)y' - 2y = 0$$

with initial conditions:  $y(0)=1$  and  $y'(0)=2$ .

2. 解下列聯立常微分方程式: (15%)

$$\frac{dx}{dt} + x + 2y = e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 1$$

with initial conditions:  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$ , and  $y'(0)=0$  (where  $y' = dy/dt$ ).

3. 解下列一維擴散偏微分方程式: (20%)

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{where } 0 < x < 1 \text{ and } 0 < t < \infty$$

with boundary conditions:  $u(0,t)=1$  and  $u(1,t)=2$ ,  
and an initial condition:

$$u(x,0) = 1 + x + \sin(\pi x) + 0.5 \sin(3\pi x)$$

4. 求函數  $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$  沿一曲線 C 從點  $(0,0,0)$  至點  $(0,0,6\pi)$  之線積分值。  
此曲線 C 可以一向量函數表示如下(直角坐標系): (10%)

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$$

其中  $0 \leq t \leq 2\pi$ 。

5. 求下列實數積分值: (20%)

$$(a) \int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t dt \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin\theta)^2} d\theta$$

6. 求下列行列式值: (10%)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

7. 在複數  $z$  平面上由  $x=-1$ ,  $y=1$  及  $x-y=-1$  等三條線所包圍之區域 R, 如下圖所示。求此區域經由一複變函數  $w=z^2$  投影後在  $w$  平面上之區域, 並以圖示之。 (10%)

