

1. 若函數集 $\{1, x, 1+\alpha x^2\}$ 在 $[-1, 1]$ 之範圍為正交, (a) 試求 α 值。 (5%)
 (b) 試求這些函數之正規正交函數 (Orthonormal function)。 (5%)

2. 解一階常微分方程式

$$\cos y \, dx + (1 + e^{-x}) \sin y \, dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}. \quad (10\%)$$

3. 函數 $f(x)$ 的定義示於 Fig. 1,

(a) 求 $f(x)$ 的正弦半幅展開函數

(sine half range expansion function)。 (10%)

(b) 求 $f(x)$ 的 Laplace 變換函數 $F(s)$,

其中 $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ 。 (10%)

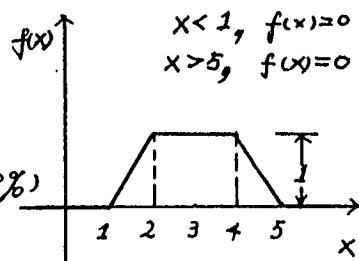


Fig. 1

4. $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, 求下列線積分值。

(a) $\oint_C \frac{e^z \, dz}{(z-1)(z+2)^2} = ?$ $C: |z|=4$ (逆時向)。 (7%)

(b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = ?$ (8%)

5. 解二維 Laplace equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \text{其邊界條件為} \begin{cases} U(0, y) = 0 \\ U(2, y) = 0 \\ U(x, 0) = 0 \\ U(x, 2) = f(x) \end{cases} \quad (15\%)$$

6. 設曲線 C 表示以 $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 及 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 為三頂角之三角形

邊界, 試求線積分 $\oint_C (y - \sin x) \, dx + \cos x \, dy$ 。 (10%)

中線 C 的圖形示於 Fig. 2.

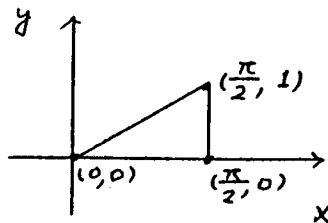


Fig. 2

7. 在一半徑為 2, 原點為球心之圓球表面上一點 $P(1, 0, \sqrt{3})$ 受一外力 \vec{F} , \vec{F} 之大小為 5, 方向與 $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ 相同, 試求此外力在球面 P 點之正向分量與切線分量大小。(10%)

8. 若 z 平面上之領域 $\begin{cases} -\pi < x < \pi \\ -1 < y < 1 \end{cases}$ 經 $w = \sin z$ 映像至 w 平面所對應之領域為何, 請繪圖示之。(10%)
其中 $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$.