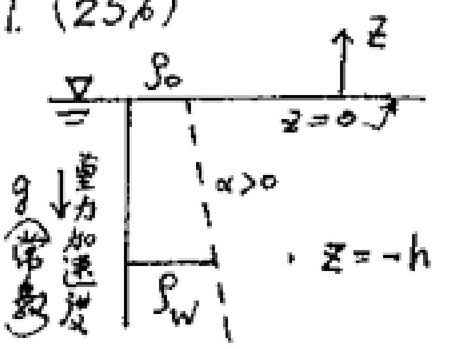
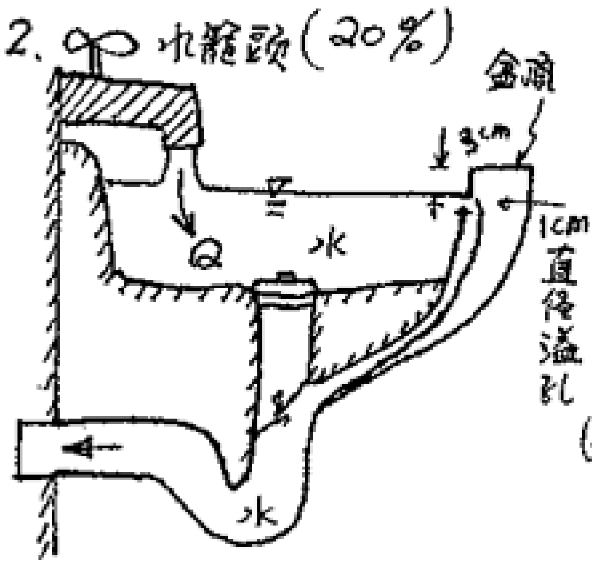
1. (25%)



設海水之密度 $\rho_W=\rho_0-\alpha z$（ρ_0, α 皆為常數，z 為垂直座標，參見左圖）當深度 $z=-h$（h 為常數）水之絕對溫度為 T_W，若有一空氣泡形成，氣泡內空氣符合理想氣體定律 $P_a=\rho_a R T_a$（R 為氣體常數，P_a, ρ_a, T_a 分別為空氣之壓力、密度、溫度），水與空氣之表面張力係數 $\sigma=\sigma_0(1-T/T_0)$ 式中 σ_0 與 T_0 均為常數，T 為水氣界面絕對溫度。試問 (1) 該深度水壓為何？(2) 此氣泡將呈球狀，其直徑為 D 時，內部之空氣壓力與密度各為何？(3) 此汽泡受到多少浮力？(4) 此汽泡形成後，受浮力產生向上加速度為何？（本題假設所有常數，T_W，D 均為已知，且 D 甚小）

2.



(20%) 如圖，有一洗臉盒，由壁上水龍頭注水流量 $Q=4\ \ell/min$，盒側欲挖 n 個溢流孔（在同高度）每孔直徑 1 公分，若孔上方尚有 3 公分之高度，試問 (1) 必需挖幾個溢孔，方不使流溢出臉盒？（假設孔口流量束縮係數為 0.61）

(2) 此時水位達穩定時，其高度距盒頂多少？

3. 有一龍捲風以等速 (V_0) 移動，其流場可用勢能函數表示 2D 流況

(20%)

$$\phi=\frac{\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x-V_0 t}-\frac{m}{2\pi}\ln\sqrt{(x-V_0 t)^2+y^2} \quad (\Gamma, m \text{ 為常數})$$

(x, y, t) 為座標及時間。(1) 若隨龍捲風之中心移動時，試求速度向量與徑向夾角 α（如左圖）為何？此 α 值是否隨 (x, y) 而變？

(2) 若固定座標觀察此龍捲風時，其局部 (local) 與傳遞 (convective) 加速度各為何 (3) 若隨此龍捲風一起移動，其局部與傳遞加速度又各為何？

(15%)

4. 請以密度 ρ，速度 V，長度 ℓ，黏性係數 μ，重力加速度 g，壓力 P，聲速 c，表面張力係數 σ，頻率 ω，流体彈性模數 E_v 等特性量，來寫出你所知之無因次參數。並說明其名稱及物理意義。（愈多愈好，但必須是"有名"的，教科書或文獻可查到的）

5. 請說明物體在流體中運動為何會產生阻力。請有系統方式"簡述"之，當然是涵蓋愈廣愈深入，本題得分愈高。(20%)

1. If a matrix A is given by $A = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}$

(a) Find the eigenvalues of the matrix A: λ_1, λ_2, λ_3 (5%)

(b) Find the eigenvector corresponding to each eigenvalue, i.e., (5%)

λ_1: (x_{11}, x_{21}, x_{31}); λ_2: (x_{12}, x_{22}, x_{32}); λ_3: (x_{13}, x_{23}, x_{33})

(c) If there is a matrix X consisting of the above eigenvectors as column vectors, i.e.,

$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ Find the inverse of the matrix X, i.e., X^{-1}. (5%)

(d) Find the matrix D, if D is defined by D= $X^{-1}AX$. (5%)

2. Evaluate the surface integral $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, where $\vec{F} = y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + 3z^2\vec{k}$,

surface S: $z = x^2 + y^2$ and $0 \le z \le 4$, and $\vec{n}$ = unit normal vector of S. (15%)

3. Solve $y(x)$ for a third-order Euler-Cauchy equation: (15%)

$x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, with $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, and $y''(1) = 2$.

4. Solve $y(x)$ for the initial value problem:

$x^2y'' + 2xy' - 2y = 6x$, with $y(1) = 3$, and $y'(1) = -7$ (10%)

5. Solve the complex equation $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$, where z is a complex

number $z = x + iy$ and $i = \sqrt{-1}$. (10%)

6. Evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos\theta} d\theta$ by using the method

of residue integration. (10%)

7. Solve $u(x,t)$ for the partial differential equation (10%)

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ for $0 < x < 1$ and $0 < t < \infty$

with two boundary conditions: $u(0,t) = 1$ and $u(1,t) = 2$, and

an initial condition: $u(x,0) = 1 + x + 2\sin\pi x + 0.5\sin 3\pi x + 0.05\sin 5\pi x$.

8. Solve $u(x,t)$ for the partial differential equation (10%)

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = 0$ for $-\infty < x < \infty$ and $0 < t < \infty$

with an initial condition: $u(x,0) = \sin x$.

7218