

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

1. The Fourier series of a function $f(x)$ with period $2L$ is given by

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

where

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \Lambda$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \Lambda$$

(a) Find the Fourier series of the function

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad \text{and} \quad f(x+2\pi) = f(x), \quad \text{for all } x$$

(b) Find the sum of $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \Lambda$ (20%)

2. Given the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Find a matrix S such that $S^{-1}AS = B$, where B is a diagonal matrix with eigenvalues of A on the diagonal. (20%)

3. (a) Compute the convolution $h(x)$ of $f(x)$ and $g(x)$.

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{if } |x| > a \end{cases}$$

(b) Use the convolution theorem that $H(\lambda) = F(\lambda) * G(\lambda)$ and the concept of the inverse

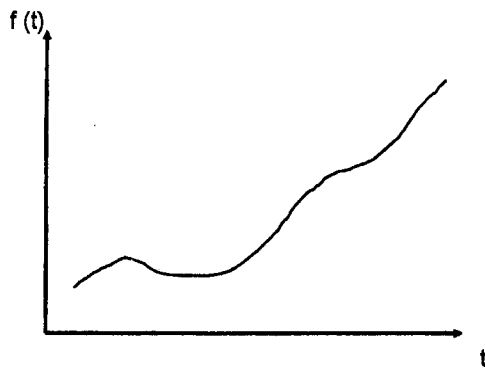
Fourier transform to evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} \right)^2 d\lambda$ (20%)

(背面仍有題目, 請繼續作答)

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

4. 平差計算過程中, 吾人對於下圖所示的非線性函數 $f(t)$ 常以線性近似的方式的方式求取其近似值。請回答下列問題:

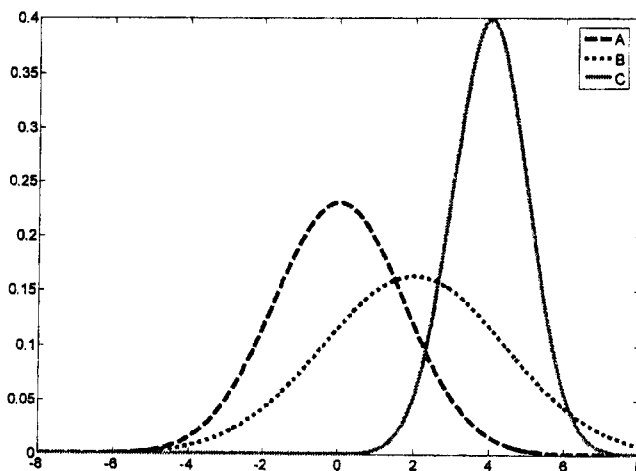
- [1] 若點 $t=a$ 之函數值 $f(a)$ 及該函數位於該點之斜率 $f'(a)$ 為已知; 請求解當 $t=x$ 之線性近似值 $f(x)$, 並將你所使用之公式中各參數的幾何意義繪於下圖中(請複製下圖至答案卷中)。
- [2] 藉由適當的擴充[1]中所使用的線性近似公式, 請說明如何以非線性近似的方式求 $f(t)$ 於 $t=x$ 時之近似值; 並簡要說明非線性近似與線性近似之差別。



(20%)

5. 下圖所示為吾人使用三部同廠牌(A,B,C), 但不同序號之經緯儀重覆檢測一個已知角度達一千次所得角度誤差之統計分布圖。請回答下列問題:

- [1] 請將三部經緯儀分別依精度(Accuracy)及準確度(Precision)高低順序排列之。
- [2] 經緯儀B與C除了隨機誤差外還包含何種誤差? 請說明如何消除該誤差之影響。
- [3] 試比較變方(Covariance)及相關性(Correlation)之差異。
- [4] 請說明無偏估值(Unbiased estimator)之定義。



(20%)