

1. Solve the Chebyshev equation

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0,$$

by series substitution. What restrictions are imposed on n if you demand that the series solution converge for $x = \pm 1$?

(15%)

2. Find the eigenvalues and corresponding orthonormal eigenvectors of the matrix:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (10\%)$$

3. The atoms at the lattice point vibrate longitudinally.

We assume that the forces between the atoms extend only to nearest neighbours, and take the crystal to be harmonic. The equation of motion is :

$$mx_n'' = f(x_{n+1} - x_n + x_{n-1} - x_n)$$

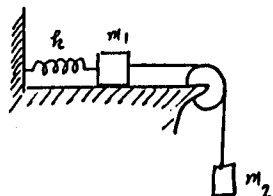
where x_n is the displacement from equilibrium of the n th atom, and f the force constant. Find the circular frequency ω ($\omega = 2\pi\nu$, ν = frequency).

(15%)

4. Use the Green's theorem to calculate the area enclosed by the ellipse

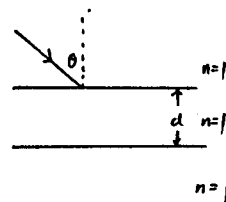
$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1. \quad (10\%)$$

5. 考慮一力常數為 k 的彈簧，一端固定在牆上，另一端連接一質量為 m_1 的物體，放在光滑水平面上，彈簧沒有伸長。現將一質量為 m_2 的物體輕掛在繩端的鉤上。將此繩繞一半徑為 R ，質量為 M 的圓滑輪而與 m_1 相接。設此繩輕且不可伸長，繩與滑輪間無相對滑動。滑輪與軸間無摩擦。求此系統之振動角頻率。



6. 兩汽笛 A 和 B，其頻率為 500 Hz 。A 為靜止，B 正以 50 m s^{-1} 之速率離開 A。某觀測者在兩汽笛間以 25 m s^{-1} 之速率離開 A。(波速為 345 m s^{-1})
 (a) 觀測者自 A 聽到的頻率為何？ (b) 觀測者聽到的拍頻為何？

7. 有兩個平面互相平行，距離為 d ，假設兩平面及平面間介質的折射率都等於 1。試求反射光干涉極大的條件。



8. 一 mol 的單原子理想氣體，($C_v = \frac{3}{2}R$)，由最初狀態(壓力 P ，體積 V)作等溫膨脹至體積成為 $2V$ 。再將體積保持一定，使壓力增至 $2P$ 。求氣體內能及熵之變化。

9. 設長直導線帶電流 I ，一長為 l 的金屬棒以速率 v 運動。計算棒上的感應電動勢的大小及方向。

