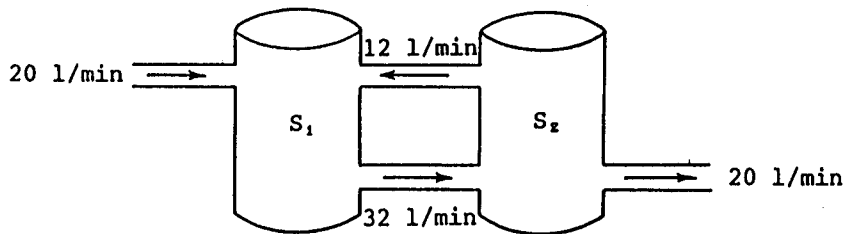


1. 一單擺質量為1 kg, 擺長1 m(擺柄之質量可忽略), 在時間 $t=0$ 時, 擺柄為垂直, 此時擺錘的角速度為5 rad/s, 求此單擺的擺動角度範圍。如欲使此單擺作圓周運動, 則初角速度最小應為何? (20分)
2. 二儲水槽 $S_1$ 及 $S_2$ 其容積各為500 l, 在起始時 $S_1$ 中盛純水,  $S_2$ 中溶解50 kg之鹽, 儲槽中溶液泵送的情形如下圖所示, 求在任何時間 $S_1$ 及 $S_2$ 中鹽份的濃度函數, 在5 min及20 min時, 各儲槽鹽份濃度為何? (15分)



3. 已知微分方程 $x^2(x+2)y''+2xy'-2y=(x+2)^2$ 之二線性獨立之相關齊次解為

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

求此方程式之全解。 (15分)

4. 解 $y'' + 5y' + 6y = u(t-1) + \delta(t-2)$ , 起始條件為 $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$ 。  
(上式中 $u$ 為step function,  $\delta$ 為Dirac delta function) (15分)

5. 求 $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$ , 週期 $=2\pi$ 之傅列(Fourier)級數, 並由此求級數

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \text{ 之和。 (15分)}$$

6. 方解石為三方晶系(trigonal system)礦物, 其三主軸由二次對稱軸、其分角線及三次反轉對稱軸構成, 以主軸為座標軸之熱膨脹係數代表二次曲面方程式為

$$-5.6x_1^2 - 5.6x_2^2 + 25x_3^2 = 10^6$$

- (a) 繪製此二次曲面之圖形(不需精確, 但須標示相關截距及曲線性質)。
- (b) 在何方向熱膨脹係數為零? (20分)