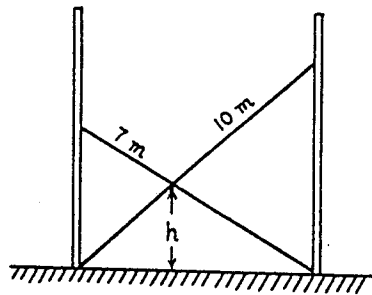


1. 一充滿水的圓球形水槽，其直徑為10 m，在其底部有一截面積為5 cm<sup>2</sup>的出口，在打開水閥放水時，計時開始，求水槽內水面高度降為5 m需時多久？將水全部放完需時多久？(15分)  
提示：Torricelli定律描述自一小孔流出之水流流速為  $v = 0.6\sqrt{2gh}$  ( $v$ =水速； $h$ =水面距出口之高度； $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>)。
2. 兩直梯分別長10 m及7 m，交叉斜置於二垂直牆壁如下圖所示，若 $h=2$  m，求此二直梯頂端的高度及二牆壁的距離。(15分)  
提示：最後方程式須以數值法例如牛頓法求解。



3. 解下面之聯立微分方程  
 $(3D^2+3D+2)x + (D^2+2D+3)y = 8$   
 $(2D^2-D-2)x + (D^2+D+1)y = 2e^{2t}$  (15分) ( $D=d/dt, D^2=d^2/dt^2$ )
4. 一球面  $x^2+y^2+z^2=4$  被一圓柱  $y^2+z^2-2z=0$  貫穿，求球面上被削去的面積。(15分)
5. 以  $(x_1, x_2, x_3)$  直角座標系統中之  $x_3$  軸為自轉軸，逆時針(反  $x_3$  軸方向觀察)旋轉  $45^\circ$ ，成為  $(y_1, y_2, y_3)$  座標系統，再以  $y_2$  為自轉軸，順時針(反  $y_2$  軸方向觀察)旋轉  $15^\circ$ ，成為  $(z_1, z_2, z_3)$  座標系統，求  $x$  空間至  $z$  空間之轉換矩陣；一正四面體其4頂點座標為  $(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, \sqrt{2})$  及  $(0, -1, \sqrt{2})$ ，求此四面體之4頂點在  $(z_1, z_2, z_3)$  座標系統中之座標。(20分)
6. 一岩石樣品受到如下之3-D應力

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 2 & -3 & -6 \\ -8 & -6 & 2 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

求最大張應力( $\sigma > 0$ )及最大壓應力( $\sigma < 0$ )之方向及大小。(20分)

備用公式：

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]^*$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \quad \text{or} \quad \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}), \quad \text{or} \quad \cosh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}, \quad \text{or} \quad -\cos^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \log \left( \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right)^*$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

$$\int \text{ctn}^{-1} x dx = x \text{ctn}^{-1} x + \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$$

$$\int \sec^{-1} x dx = x \sec^{-1} x - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\int \csc^{-1} x dx = x \csc^{-1} x + \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\int \text{versin}^{-1} x dx = (x - 1) \text{versin}^{-1} x + \sqrt{2x - x^2}$$

$$\int (\sin^{-1} x)^2 dx = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x$$

$$\int (\cos^{-1} x)^2 dx = x(\cos^{-1} x)^2 - 2x - 2\sqrt{1 - x^2} \cos^{-1} x$$

$$\int x \sin^{-1} x dx = \frac{1}{4} [(2x^2 - 1) \sin^{-1} x + x\sqrt{1 - x^2}]$$

$$\int x \cos^{-1} x dx = \frac{1}{4} [(2x^2 - 1) \cos^{-1} x - x\sqrt{1 - x^2}]$$

$$\int x \tan^{-1} x dx = \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \tan^{-1} x - x]$$

$$\int x \text{ctn}^{-1} x dx = \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \text{ctn}^{-1} x + x]$$

$$\int x \sec^{-1} x dx = \frac{1}{2} [x^2 \sec^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}]$$

log 為自然對數函數