

1. 自地表垂直發射一投射體，並欲永遠脫離地球，忽略空氣之阻力因素，導出該投射體速度與地心距離之函數關係，並計算脫離地球之最低速度。(15分)  
提示：1. 牛頓萬有引力定律(Newton's law of universal gravitation)

$$F \propto \frac{1}{r^2} \quad (F \text{ 爲引力；} r \text{ 爲該投射體與地心之距離})$$

2. 地球半徑  $R=6372 \times 10^3 \text{ m}$ ，地表重力加速度  $g=9.8 \text{ m/s}^2$

2. 已知  $xy'' + 2y' + xy = \sin x$  之一齊次解爲  $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ ，求此微分方程之全解。(15分)

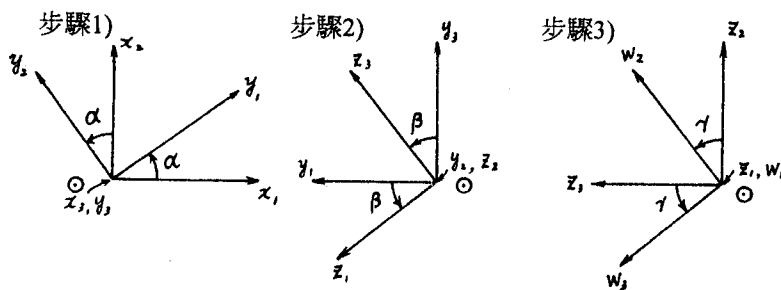
3. 以級數法解微分方程  $y'' + \cos x y = 0$ ，各級數解至少須寫出4項。(20分)

$$\text{提示：} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

4. 三地下水監測井之座標及地下水位高如下：井A(0, 0), -10；井B(10, 0), -8；井C(5, 20), -9，單位爲m，求地下水位面方程式，如AB線方向爲正東則地下水流方向爲何(以方位角表示，如N32°E)？(15分)

5. 求擺線  $\vec{r} = 2(t - \sin t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 與x-軸圍成的區域(厚度 = 1，密度 = 1)之質量。(15分)

6. X座標系統經下面三步驟轉換爲W座標系統，求此轉換之轉換矩陣(即  $w = Tx$  之T)，如  $\alpha=30^\circ$ ， $\beta=45^\circ$ ， $\gamma=60^\circ$ ，計算一六面體8頂點(0, 0, 0)，(1, 0, 0)，(1, 1, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)，(1, 0, 1)，(1, 1, 1)，(0, 1, 1)經轉換後之座標。(15分)



7. 橄欖石屬斜方晶系(orthorhombic system)礦物，其一般化學式爲  $(\text{Mg, Fe})_2\text{SiO}_4$ ，爲典型之固溶(solid solution)礦物，現有一橄欖石樣品，其單位晶室常數測得爲  $a = 4.78 \text{ \AA}$ ， $b = 10.30 \text{ \AA}$ ， $c = 6.02 \text{ \AA}$ ，密度測得爲  $3.7186 \text{ g/cm}^3$ ，橄欖石之單位晶室分子數( $Z$ ) = 4，計算此橄欖石真正之化學式。(5分)  
( $\text{Mg} = 24.305$ ， $\text{Fe} = 55.847$ ， $\text{Si} = 28.086$ ， $\text{O} = 16.0$ ，Avogadro no. =  $6.022 \times 10^{23}$ )

(背面仍有題目,請繼續作答)

備用公式：

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}.$$

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}.$$

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x.$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$$

$$\int x^3 \sin x \, dx = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x.$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x} = -x \cot x + \log |\sin x|.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2}.$$

$$\int x \cos^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}.$$

$$\int x^2 \cos^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2x + \frac{x \cos 2x}{4}.$$

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x.$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x.$$

$$\int x^3 \cos x \, dx = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x.$$

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = x \tan x + \log |\cos x|.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \log \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$\int \tan x \, dx = -\log |\cos x| = \log |\sec x|.$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x.$$

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x|.$$

$$\int \cot x \, dx = \log |\sin x|.$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x.$$

$$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \log |\sin x|.$$