1. 求解下列常微分方程之y(x)：(15%)

(a) $x\dfrac{dy(x)}{dx}+y(x)-y^2(x)=0$

(b) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}-2\dfrac{dy(x)}{dx}+y(x)=e^x$

(c) $x^3\dfrac{d^3y(x)}{dx^3}+x\dfrac{dy(x)}{dx}-y(x)=0$

2. 若在3維度空間中有一力場：(15%)

$\vec{F}=(3x^2+y)\vec{i}+(z-y^2)\vec{j}+x\vec{k}$

求解$\vec{F}$對圖2-1所示路徑所作之功？

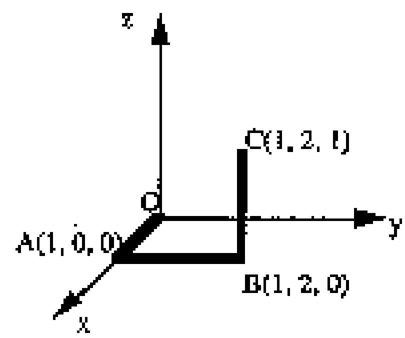

圖2-1

3. 推導如圖3-1所示彈簧質量系統之振動方程，並求解該系統之自然頻率？(14%)

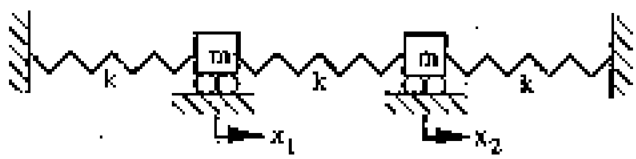

圖3-1

4. 如圖4-1所示，求解半徑均為a互相垂交二圓柱共同部份之體積？(14%)

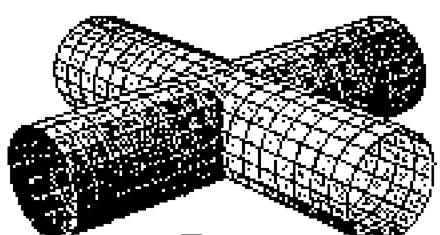
圖4-1

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{a^2-x^2}^{\,3}$$

$$\int\sin^{-1}(x)\,dx=x\sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}$$

5. 對於包絡表面為S之任意平滑體積(smooth volume)V，說明：(14%)

(a) $\iiint_V \bar{\nabla}\cdot\bar{u}\,dV=\iint_S \bar{u}\cdot\bar{n}\,dS$

(b) $\iint_S \bar{n}\,dS=\bar{0}$

6. 利用Gauss消去法將下列方程組：

$$\begin{bmatrix}1&4&2&0\\4&25&26&9\\2&26&44&34\\0&9&34&89\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6\\51\\94\\171\end{Bmatrix}\qquad(6-1)$$

化簡為：

$$\begin{bmatrix}1&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\0&1&u_{23}&u_{24}\\0&0&1&u_{34}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{Bmatrix}\qquad(6-2)$$

求解(6-2)式中所有之未知係數u_{ij}，x_i以及b_i？(14%)

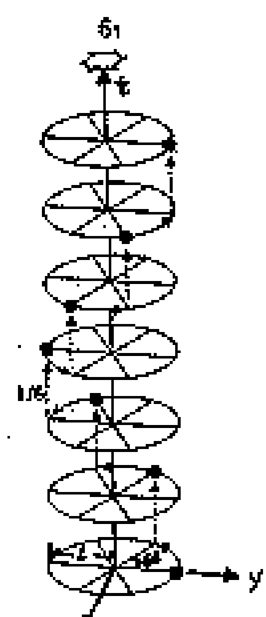

圖7-1

7. 一原子沿如圖7-1所示之軌跡進行六次旋移運動(6_1)，求此原子之運動軌跡方程式？(14%)