

1. 求解下列常微分方程之 $y(x)$: (24%)

(a) $x^2 \frac{dy(x)}{dx} - y(x) - y^2(x) = 0$

(b) $\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = \sin(x)$

(c) $x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0$

2. 推導如圖所示彈簧質量系統之運動方程，並求解該系統之自然頻率？(16%)



3. 敘述並證明 Gauss 散度定理 (divergence theorem)，並證明：(20%)

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

其中 S 為一包絡表面， \vec{n} 為外法向量。

4. 已知：

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

求 λ 與相應之 $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$? (20%)

5. 若在 2 維度空間中有一力場：

$$\vec{F} = (x^2 - 3y)\vec{i} + (2x - y^2)\vec{j} \quad (N)$$

求解該力場對如圖所示路徑 OABC 所作之功？(20%)

