

1. (21%)

求解下列常微分方程式？

(a)  $\frac{dy}{dx} - 1 = e^{-y} \sin x$

(b)  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$

(c)  $\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \frac{dy}{dx} = 0$

2. (14%)

求解下列矩陣之特徵值(eigenvalue)及相對應之特徵向量(eigenvector)？

(a)  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (21%)

已知三維空間中有三點 A(12, 5, 0)、B(0, 4, 0)與 C(12, 0, 6)，求解

- (a) 此三點所構成之平面方程式？  
(b) 該平面方程式與 x-y 平面之交線方程式？  
(c) 該平面與 x-y 平面之交角？

4. (15%)

一內半徑為 a 之圓球(sphere)內裝一正圓柱(right circular cylinder)，求此正圓柱最大可能之體積？

5. (14%)

推導平面 Laplacian( $\nabla^2$ )之極坐標( $r, \theta$ )表示？

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

6. (15%)

求解 z 的五個根(roots)？

$$z^5 + 32 = 0$$