

1. (15%)

求解 $y(x)$?

(a) $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{2x}{1+x^4}$

(b) $\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (\cos x)y(x) = 0, x > 0, y(0)=1, y'(0)=1$, 將 $y(x)$ 以冪級數展開至 3 項。

(c) $x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = x^3 e^x$

2. (18%)

求解下列矩陣方程式中之所有未知係數 l_{ij} 與 u_{ij} ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (15%)

已知三維空間中有三點 $A(1, 1, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$ 與 $C(1, 0, 1)$ ，求解

(a) A 、 B 、 C 三點所成之平面至 $D(-1, -1, -1)$ 之最短距離?

(b) ΔABC 之面積?

(c) \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{BC} 所夾之銳角?

4. (16%)

若一半徑為 a 之圓柱體(circular cylinder)體積為固定，求該圓柱體最大可能之表面積(以 a 表示)?

5. (16%)

若 x 與 y 之理論關係表示為： $y = Ax^2 + B$ 。現已知 x 與 y 有一組試驗數據 $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i), i=1, \dots, n$ 。

說明如何用最小平方差法(least square error)決定 A 與 B ?

6. (12%)

推導以下方程式之球坐標 (ρ, ϕ, θ) 表示?

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

其中 $x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$

7. (8%)

若 $x = u \cos v, y = u \sin v$ ，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}$ 與 $\frac{\partial y}{\partial v}$?