

1. (15%)

求解

(a)  $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx = ?$

(b)  $y(x) = \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

(c)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t} = ?$

2. (18%)

求解下列矩陣方程式中之所有未知係數  $l_{ij}$  與  $u_{ij}$ ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (15%)

已知三維空間中有三點  $A(1, 1, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$  與  $C(1, 0, 1)$ ，求解

(a)  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點所成之平面至  $D(-1, -1, -1)$  之最短距離？

(b)  $\Delta ABC$  之面積？

(c)  $\overline{AB}$  與  $\overline{BC}$  所夾之銳角？

4. (16%)

若一半徑為  $a$  之圓柱體(circular cylinder)體積為固定，求該圓柱體最大可能之表面積(以  $a$  表示)？

5. (16%)

若  $x$  與  $y$  之理論關係表示為： $y = Ax^2 + B$ 。現已知  $x$  與  $y$  有一組試驗數據  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ 。

說明如何用最小平方差法(least square error)決定  $A$  與  $B$ ？

6. (12%)

推導以下方程式之球坐標  $(\rho, \phi, \theta)$  表示？

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

其中  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \phi$

7. (8%)

若  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$  與  $\frac{\partial y}{\partial v}$ ？