**第一題** (滿分：18分)

$x, y, z$ 三个函數滿足下列三个线性方程式：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases}$$

請証明除非行列式(determinant) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$，否則 $x=y=z=0$。

**第二題** (滿分：三小題各6分，共18分)

(1) 請給出部分積分法(integration by parts)之數学式，並証明之。

(2) 請利用部分積分法，求下列積分式之解：

$$I=\int_0^{+\infty} x e^{-3x}\,dx.$$

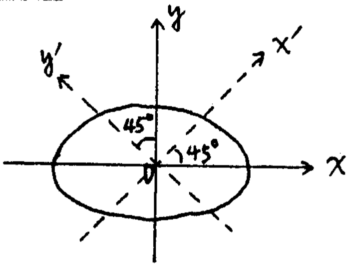
(3) 求上述第(2)小題積分式之解的过程中，会利用到 L'Hôpital rule 来估算 $+\infty/+\infty$ 之值。請寫出此rule的數学式並証明之。

**第三題** (滿分：两小題各6分，共12分)

(1) $x$ 為实數(real numbers)，請找出 $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-3)^n$ 為收斂(convergent)時，$x$ 的區間(domain)。

(2) 續第(1)小題，請找出 $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-3)^n/n^2$ 為收斂時，$x$ 的區間。

**第四題** (滿分：16分)




左图顯示 $x$-$y$ 及 $x'$-$y'$ 两个Cartesian座標系统有共同的原点0，$x$-轴与 $x'$-轴夾45°角，$y$-轴与 $y'$-轴夾45°角。以 $x'$-$y'$ 座標系统為参考時，图中所示橢圆的方程式為

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2=32.$$

請推導出此橢圆在 $x$-$y$ 座標系统的方程式。

**第五題** (滿分：12分)

請嚴謹的証明下列簡單的命題：

$n$ 邊形 $(n\geq 3)$ 所有内角的和等於 $(n-2)\times 180°$。

第六題（滿分：12分）

請說明下列敘述是否正確：

「$x$ 和 $y$ 為兩個未知函數(unknown functions)。從兩個獨立的(independent)方程式(equations)，可以找出 $x$ 及 $y$ 的唯一解(unique solution)。例如，從 $x+y=2$ 和 $x-y=0$ 兩個獨立的方程式，可得到此唯一解為 $x=1, y=1$。」

第七題（滿分：12分）

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 為線性二階均質的微分方程式(linear second order homogeneous differential equation)。下式為此微分方程式的一個通解(general solution)：

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x, \quad \text{----(A)}$$

其中 $C_1$ 與 $C_2$ 皆為任意的常數。當邊界條件為 $y(x=0)=3$ 和 $y(x=\frac{\pi}{2})=1$ 時，可將這些邊界條件代入公式(A)而解出 $y(x)$ 的特解(particular solution)為

$$y(x) = 3\cos x + \sin x. \quad \text{-----(B)}$$

同理，當邊界條件為 $y(x=0)=2$ 和 $y(x=\pi)=-2$ 時，$y(x)$ 的特解為

$$y(x) = 2\cos x + C_2\sin x。 \quad \text{----(C)}$$

公式(B)與公式(C)的兩個特解中，何以公式(B)是唯一解(unique solution)，而公式(C)則不然？就一般線性二階均質微分方程式而言，請問何種邊界條件才是可得到唯一特解的恰當邊界條件？