I. (1) 設 n 次多項式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n$ 之係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均為實數且滿足 $\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{a_0}{n+1}=0$. 試證明 $p(x)$ 於 0 與 1 間至少有一根. (9分)

(2) 設 $F:[1,3]\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^x \frac{1}{[t]}\,dt$, 而 $[t]$ 表最大整數函數. 求 F 之導函數(註明定義域). (9分)

II. 試判斷下列二瑕積分是否收斂? 若收斂則求其所收斂之值. 否則說明理由.

(1) $\displaystyle\int_{1^+}^{+\infty}\frac{dx}{x(x-1)}$; (9分) (2) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$. (9分)

III. (1) 設 p 為正數. 試求序列 $\{\sqrt[n]{p}\}=\{p, \sqrt{p}, \sqrt[3]{p}, \cdots, \sqrt[n]{p}, \cdots\}$ 之極限 (8分)

(2) 求 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$ 之最大整數值為何? (10分)

IV. (1) 試問 $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

於原點 $(0,0)$ 是否可微分? 試說明理由. (9分)

(2) 設 $g(x,y)=\frac{xy}{x+y}$. 試求 $x^2g_{xx}(x,y)+2xy\,g_{xy}(x,y)+y^2g_{yy}(x,y)$ 之值. (9分)

V. 設一金屬板在點 (x,y) 之溫度函數為 $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. 試問在圓周 $x^2+y^2=25$ 上何處溫度最高? 何處溫度最低? 並求此最高及最低溫度之值. (10分)

VI. (1) 求 $\int_0^1\int_{y^2}^1\sqrt{x}\exp(x^3)\,dx\,dy$ 之值. (8分)

(2) 設 V 為由六平面 $x-y+z=-1$, $x-y+z=1$, $x+y+2z=0$, $x+y+2z=2$, $2x-z=-2$, 及 $2x-z=1$, 所圍成的空間立體. 試求

$$\iiint_V (x-y+z)^2(x+y+2z)^3(2x-z)^2\,dx\,dy\,dz$$

之值. (10分)