(12%) 1. 若將 $f(x)$ 展開成 Fourier 級數，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

試問

(a) 首項 $\frac{a_0}{2}$ 所代表之意義為何？

(b) $\frac{2n\pi}{T}$ 表示何種物理意義？

(c) 具何種特性之函數 $f(x)$ 之微分，即 $f'(x)$，方可由其 Fourier 級數之表示式逐項 (term by term) 微分求得？

(d) 具何種特性之函數 $f(x)$ 之積分，即 $\int f(x)dx$，方可由其 Fourier 級數之表示式逐項積分求得？

(e) 此級數是否可完全收斂於 $f(x)$？請說明之.

(f) 何謂 Gibb's phenomenon？並說明其成因.

(5%) 2. 有一直線 $L_1$：$c_1x+c_2y=\alpha$

(a) 試求該直線 $L_1$ 之垂直向量.

(b) 利用 (a) 之結果，求通過點 $(x_0, y_0)$ 且垂直 $L_1$ 之直線 $L_2$ 之方程式.

(5%) 3. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 為一有向積 (Vector product). 試說明下式為何成立？

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = m\vec{a}+n\vec{b}$$

式中 $m$, $n$ 表示純量 (Scalar). 並請推導出 $m$ 和 $n$ 之表示式.

(8%) 4. 設 $f(z)$ 為一複變函數. 將 $f(z)$ 對 $z=a$ 展開成級數，若 $z=a$ 分別為 $f(z)$ 之一個

(a) $m$ 階極點

(b) essential singular point

(c) removable singular point

(d) analytic point

則其級數展開型式應各為何？請說明之.

(10%) 5. 試解 $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}=?$ 其中 $n\geq 2$

(10%) 6. 利用 eigenvector expansion 法解下述方程式

$$AX = \Lambda X + C$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 而 $\Lambda = 1, 2,$ 和 3 .

(15%) 7. 解下列偏微分方程 (Partial Differential Equation)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -x \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad t \geq 0$$

$u(x,0) = 2$ , $u(0,t) = t^2 + 1$

(20%) 8. 解下列常微分方程 (Ordinary Differential Equation)

(a) $4x^2 y'' + x y' + x y = 0$

(b) $(6x^2 y + 12 x y + y^2)\, dx + (6x^2 + 2y)\, dy = 0$

(15%) 9. 求圖 1 中所示三角形函數 $f(t)$ 之 Laplace transform . 並求出當 $a \to 0$ 時, 此 Laplace transform 之極限值.

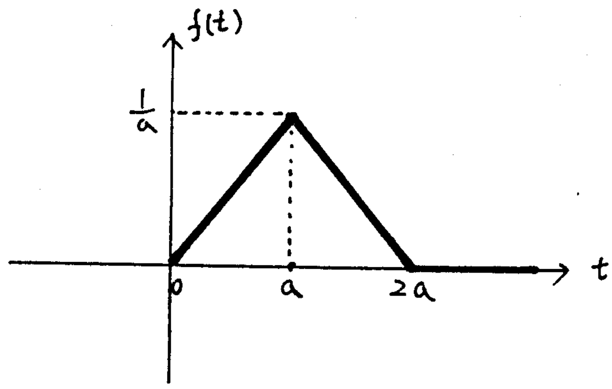


圖 1