

本試題是否可以使用計算機: 可使用, 不可使用 (請命題老師勾選)

一. 請寫出並說明下述之定理:

[8%] (a) Regular Sturm-Liouville problem for $[a, b]$.

[8%] (b) Green's Theorem.

[9%] (c) Stoke's Theorem.

二. 已知 $y'' - 2y' + y = 2\sin(3x); y(0) = 2, y'(0) = 1$.

[5%] (a) y 之齊次解 $y_h = ?$

[5%] (b) y 之特解 $y_p = ?$

三. 請以 Orthogonal matrix 之原理(亦法或概念)將下列二次式 (quadratic form):

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2^2 = 5$$

(a) 化簡並求出其標準式 (standard form). [17%]

(b) 說明該標準式為何種曲線 (ellipse, parabola, hyperbola)? [3%]

(背面仍有題目, 請繼續作答)

本試題是否可以使用計算機： 可使用， 不可使用（請命題老師勾選）

四. (a) 請以 Convolution theorem 求解 $f(t)$ ：
[10%]

$$f(t) = 2t + 1 + \int_0^t f(t-\alpha) e^{-\alpha} d\alpha$$

[15%] (b) 設 $u(t)$ 滿足

$$au'' + bu' + cu = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = \frac{1}{a}.$$

請證明：

$y(t) = f(t) * u(t)$ 滿足

$$ay'' + by' + cy = f(t); \quad y(0) = y'(0) = 0$$

[p.s. $f(t) * u(t)$ 表示 $f(t)$ 與 $u(t)$ 之 Convolution 運算.]

五. 已知 PDE $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 其邊界條件

[20%] 答： $u(0, y) = u(8, y) = 100, \quad y \geq 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8$$

求解： $u(x, y) = ?$