

1. 試決定 C 及 K 之值使下列一階常微分方程式為恰當方程式 (Exact diff. Eq)

$$[Cx^2ye^y + 2\cos y]dx + [x^3e^y + x^3e^y + Kx\sin y]dy = 0 \quad (7\%)$$

2. 試求積分值  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}} dx$  (7%)

3. 假設在區域 R 內, u 及 v 皆為諧和函數 (Harmonic function) 試証, 在此區域內  $(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + i(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$  為可解折。 (8%)

4(a) 試求下列方程式之特徵值及其對應之特徵函數 (15%)

$$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0 \quad y(1) = y(2) = 0$$

(b) 利用 (a) 之結果求  $f(x) = 1$  之傅利葉級數展開式。

5. 試求當 C 為半徑  $r=1$  之圓周曲線, 且  $z=2$  時之值。 (8%)

$$I = \oint_C [(e^{-x^2}yz)dx + (e^{-y^2} + xz + 2x)dy + e^{-z^2}dz]$$

6. 試解偏微分方程式 (15%)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos \omega x \quad 0 < x < 1, t > 0$$

起始條件:  $u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$  當  $0 < x < 1$

邊界條件:  $u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$  當  $t > 0$

7. 已知矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{在此 } \alpha \text{ 及 } \beta \text{ 皆非零之複數}$$

(一) 試求對應 A 矩陣之特徵值及特徵向量。

(二) 試求 (a) 及 (b) 之對應條件。(a) 特徵值為實數時。

(b) 特徵向量互為正交時。

(三) 試証僅當矩陣 A 為 Hermitian 矩陣時, 方能滿足 (15%)

(a) 及 (b) 兩個條件。

8. 試解:  $y'' + y = \begin{cases} 0 & \text{當 } x < \pi \\ 1 & \text{當 } x \geq \pi \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (15\%)$

9. 求逆拉氏轉換  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \right]$ , 在此  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ . (10%)