

1. 試求積分 $\int_0^{\infty} \frac{w^3 \sin w}{w^4 + 4} dw = ?$ (13%)

2. 試求積分 $\int_c \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$ 其中 $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ (12%)

$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 而 c 為下列各種曲線

(a) 由 $(0, 0)$ 至 $(1, 1)$ 的直線。

(b) 由 $(0, 0)$ 沿着拋物線 $y = x^2$ 至 $(1, 1)$ 的曲線。

(c) 由 $(0, 0)$ 沿着曲線 $\vec{x}(t) = t^{3/2}\vec{i} + t^5\vec{j}$ 至 $(1, 1)$ 的曲線。

3. 試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 之特徵矩陣 (15%)

4. 已知一維波動方程式為 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (10%)

(a) 試証若 $u = x - at$ 且 $v = x + at$ 則 $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$

(b) 試証 $y = f(x - at) + g(x + at)$ 為一維波動方程式的一般解 (General solution).

5. 試求反拉氏轉換 $f(t)$, 並說明存在之理由

(a) $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{s^2 + 9} \right]$ (3%)

(b) $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\ln \frac{s(s+1)}{(s-2)^2} \right]$ (4%)

(c) $f(t) = \mathcal{L}^{-1} [s e^{-as}]$ (3%)

6. 應用降階法 (Reduction of order Method) (10%)

解 $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1.$

7. 試解常微分方程式 $y'' + \lambda y = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$ (10%)

其邊界條件 $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$ 並詳細列舉其解之特性及參數 λ 之性質。

8. 複變函數在極坐標上 $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$, 如果 $f(z)$ 是解析函數 (Analytical function) 必需滿足什麼條件, 並推導其條件式. 同時 $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ 可滿足那一種方程式之解. (10%)
9. 何謂 Completeness of Sets, 其條件為何? (4%)
10. 何謂 well-posed problem, 其條件為何? (3%)
11. 函數需具何種性質, 始可做拉氏轉換 (Laplace Transform)? 並舉一例. (3%)